Übungsnotizen 11

I. Quiz

- Frage 1: Sei V ein K-VR, $U \leq V$. Definiere $U^\perp$, den Annulator von U.

  Lösung 1: $U^\perp := \{ \ell \in V^\vee : \forall u \in U : \ell(u) = 0 \}$

- Frage 2: Sei $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ die Standardbasis und $U = \langle e_1 - e_3 - e_4, e_1 + e_3 \rangle$. Bestimme eine Basis von $U^\perp$.

- Lösung 2: Wir suchen $\ell \in V^\vee : \ell(e_1 - e_3 - e_4) = \ell(e_1 + e_3) = 0$.

  Sei $\ell = \sum_{i=1}^{4} a_i e_i^*$. Dann ist $\ell(e_1 - e_3 - e_4) = a_1 - a_3 - a_4$ und $\ell(e_1 + e_3) = a_1 + a_3$.

  Wir lösen $\begin{cases} a_1 - a_3 - a_4 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \end{cases}$

  $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

  $$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right),$$ also $U^\perp = \{ \ell \in V^\vee \mid \ell = a e_2^* + b(e_1^* - e_3^* + 2e_4^*) \}$. Als Basis finden wir z. B. $B_{U^\perp} = (e_2^*, e_1^* - e_3^* + 2e_4^*)$.

  Schlussendlich überprüfen wir noch, ob das Ergebnis Sinn macht: Dimensionscheck $\dim U^\perp + \dim U = 2 + 2 = 4 = \dim V$ ✓

  ... und ob wir uns auch nicht verrechnet haben:

  $e_2^*(e_1 - e_3 - e_4) = 0 = e_2^*(e_1 + e_3)$

  $(e_1^* - e_3^* + 2e_4^*)(e_1 - e_3 - e_4) = 0 = (e_1^* - e_3^* - 2e_4^*)(e_1 + e_3)$.

Interpretation der Annulatoren als orthogonales Komplement.

Erinnerung: Wir haben vergangene Woche den Dualraum eines *endlichdimensionalen* Vektorraums als Raum von Zeilen- vektoren interpretiert, indem wir gezeigt haben, dass $V^\vee \cong_\varphi K^n$, den Raum der n-dim. Zeilenvektoren.

Die Abbildung $\ell : V \to K \in V^\vee$ konnten wir dadurch als Multiplikation des Zeilenvektors $\varphi(\ell)$ mit dem Argument v verstehen, wobei $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$.

Allgemeines Setting

Def.: Ein *Skalarproduktraum* ist ein K-Vektorraum wobei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ gemeinsam mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Das Skalarprodukt ist eine *bilineare* (i) Abbildung $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to K$ mit *folgenden* Eigenschaften:

ii) *hermitsch*: $\forall u, v \in V : \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

iii) *positive Definitheit*: $\forall v \in V : \langle v, v \rangle > 0$ (auch für $\mathbb{C}$-VR gilt $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ wegen ii)!)

Bemerke: Die in der Erinnerung definierte „Multiplikation" ist ein Skalarprodukt auf dem Raum der Spaltenvektoren, genannt das Standardskalarprodukt.

Def.: Zwei Vektoren v_1, v_2 eines Skalarproduktraums heißen *orthogonal*, falls $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Man schreibt auch $v_1 \perp v_2$.

Def.: Ein Vektor v heißt normiert, falls $\langle v, v \rangle = 1$.

Interpretation eines Annulators als orthogonales Komplement:

Def.: Das <u>orthogonale Komplement</u> eines UVR $U \leq V$, wobei V ein Skalarproduktraum ist, ist definiert als:

$$U^\perp := \{v \in V \mid \forall u \in U : \langle v, u \rangle = 0\}.$$

Bemerke: Die Namensgebungen lassen vermuten, dass das orth. Komplement und der Annulator von $U \leq V$ gewisse Ähnlichkeiten haben.

Prop.: Der Annulator $U_A^\perp$ eines UVR von V, wobei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-VR ist, ist isomorph zum UVR $U_0^\perp$, dem orthog. Komplement von U in V.

Beweis-Skizze: Aus der letzten Stunde wissen wir, dass

$$V^\vee \underset{\varphi}{\cong} K_Z^n \underset{\psi}{\cong} K_{Sp}^n \underset{\tau}{\cong} V,$$ wobei K_Z^n, K_{Sp}^n der n-dim. K-Zeilen- bzw. K-Spaltenvektorraum ist.

Somit gilt $U_A^\perp \cong \varphi(U_A^\perp) = \{z \in K_Z^n \mid z = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \forall s \in \tau(U) : s = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} : (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = 0\}$, wobei mittels τ gilt, dass $U \cong \tau(U) \leq K_{Sp}^n$.

Wenden wir noch ψ auf $\varphi(U_A^\perp)$ an, um die Zeilen- als Spaltenvektoren zu schreiben, vereinfacht sich die Darstellung von $U_A^\perp$ zu $\psi(\varphi(U_A^\perp)) = \{v \in K_{Sp}^n : \forall u \in \tau(U) : \langle v, u \rangle = 0\}$.

Bsp.: Sei $V = \mathbb{R}^4$, U wie in Quiz ($U = \langle u_1, u_2 \rangle = \langle e_1 - e_3 - e_4, e_1 + e_3 \rangle$). Dann ist das orthog. Komplement von U gegeben als

$U_0^\perp = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \forall u \in U : \langle v, u \rangle = 0\} \overset{\text{Bilinearität}}{=} \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \langle v, u_1 \rangle = 0 = \langle v, u_2 \rangle\}$. Dafür lösen wir genau das gleiche LGS, wie bei der Lösung des Quizzes und erhalten

$U_0^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \varphi(U_A^\perp)$ wobei φ die Koordinatenabbildung $V^\vee \underset{\varphi}{\cong} K^n$ ist.

Bemerke: Letztlich ist es egal, welche Definition man zum Rechnen verwendet, ich finde die Interpretation als orthogonales Komplement aber recht anschaulich.

Bemerke: Diese Interpretation funktioniert nur für $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Insbesondere nicht für VR über endlichen Körpern, da diese nie ein Skalarprodukt besitzen (es gibt keine Ordnung auf endlichen Körpern).

Bsp. 2: Sei $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$, $U = \langle x+1, x^2+1 \rangle \leq V$.

Berechne $U_A^{\perp}$ $(= \mathrm{Ann}(U))$.

Mittels der Koordinatenabbildung τ erhalten wir, dass $\tau(U) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Wir berechnen $U_0^{\perp}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$, also $U_0^{\perp} = \{ \begin{pmatrix} -a \\ a \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \}$ mit Basis $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ somit ist $\mathrm{Ann}(U) = \{ \ell \in V^{\vee} \mid \ell = a \cdot (-1^* + x^* + (x^2)^*) \}$, wobei $1^* : V \to K, (a + bx + cx^2) \mapsto a$, $x^* : V \to K$, $(a + bx + cx^2) \mapsto b$, $(x^2)^* : V \to K$, $(a + bx + cx^2) \mapsto c$.

Def. Orthonormalbasis

Eine Orthonormalbasis eines Skalarproduktraums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V, sodass $\forall b_i, b_j : \langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases} = \delta_{ij}$.

Eine Orthogonalbasis wäre eine Basis, für die $\forall b_i, b_j$: $i \neq j \Rightarrow \langle b_i, b_j \rangle = 0$. Insbesondere ist jede Orthonormalbasis eine Orthogonalbasis

Existenz einer Orthonormalbasis im Endlichdimensionalen

Wir geben einen Algorithmus an, der aus einer beliebigen Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Orthonormalbasis $C = (v_1, \dots, v_n)$ generiert. Insbesondere existiert also eine Orthonormal- und somit eine Orthogonalbasis.

Der Gram-Schmidt-Algorithmus

Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Sei $v_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle v_1', v_1' \rangle}} \cdot v_1'$ und $v_1' = b_1$.

Sei weiters $v_j = \frac{1}{\sqrt{\langle v_j', v_j' \rangle}} v_j'$ und $v_j' = b_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle v_i, b_j \rangle \cdot v_i$.

Dann ist $C = (v_1, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Beweis: C ist eine Basis, da wir nur der Reihe Operationen durchführen, die dem Tupel $(v_1, \dots, v_{j-1}, b_j, \dots, b_n)$ die Basis-Eigenschaft erhalten.

Es gilt $\langle v_j, v_j \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{\langle v_j', v_j' \rangle}} v_j', \frac{1}{\sqrt{\langle v_j', v_j' \rangle}} v_j' \rangle = \frac{1}{\langle v_j', v_j' \rangle} \cdot \langle v_j', v_j' \rangle =$
$= 1$, sowie für oBdA $i < j$:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle v_i, \frac{1}{\sqrt{v_j', v_j'}} \left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle v_k, b_j \rangle v_k \right) \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{v_j', v_j'}} \left(\langle v_i, b_j \rangle - \sum_{k=1}^{j-1} \langle v_k, b_j \rangle \langle v_i, v_k \rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{v_j', v_j'}} \left(\langle v_i, b_j \rangle - \langle v_i, b_j \rangle \right) = 0. \qquad \dashv$$

Bsp (Gram-Schmidt): Sei $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right)$.

Berechne eine Orthonormalbasis von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt ist.

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle e_1, e_1 \rangle}} \cdot e_1 = e_1$$

$$v_2' = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{1} \langle v_i, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle v_i = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \langle v_1, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle v_1 =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\langle v_2', v_2' \rangle}} \cdot v_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

$$v_3' = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \left(\langle v_1, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle v_1 + \langle v_2, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle v_2 \right) =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1/2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}.$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{\langle v_3', v_3' \rangle}} \cdot v_3' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \begin{pmatrix}0\\-1/2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Zurück zu dualen Abbildungen.

Wir wollen zum Abschluss zeigen, dass $f: V \to W$ ein Isomorphismus ist genau dann wenn $f^*: W^* \to V^*$ ein Isomorphismus ist (für endlich-dim. VR V, W). Wir geben zwei verschiedene Beweise:

i) Sei $f: V \to W$ ein Isom. Dann existiert $g: W \to V$ mit $g \circ f = id_V$, $f \circ g = id_W$. Somit ist aber $g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = (id_W)^* = id_{W^*}$ und $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = (id_V)^* = id_{V^*}$, also f^* ein Isom.

ii) Sei $f: V \to W$ ein Isom. Dann ist f surj. und inj., also ist $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, $\mathrm{Bild}(f) = W \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f)^\perp = V$, $\mathrm{Bild}(f)^\perp = \{0\}$ $\Leftrightarrow \mathrm{im}(f^*) = V \wedge \mathrm{Ker}(f^*) = \{0\} \Leftrightarrow f^*$ bij. $\Leftrightarrow f^*$ Isom.

Wir benutzen hier, dass $(id_V)^* = id_{V^*}$, da $\forall \ell \in V^*: \ell \circ id_V = \ell$, sowie $(\underset{W\to U}{f} \circ \underset{V\to W}{g})^* = g^* \circ f^*$, da $\forall \ell: U \to K$ gilt: $(f \circ g)^*(\ell) = \ell \circ (f \circ g) =$

$$= (\ell \circ f) \circ g = g^*(f^*(\ell)) = (g^* \circ f^*)(\ell).$$

Ein Bsp. für die Notwendigkeit von Endlichdimensionalität.

Wir haben gezeigt, dass für V endlichdimensional gilt, dass $V^\vee \cong V$.
Gilt dies auch im Unendlichdimensionalen?

Gegenbeispiel: Sei $\mathbb{F}_2^{(\mathbb{N})}$ der Raum aller Folgen mit Einträgen in $\mathbb{F}_2$.
Dann ist $|\mathbb{F}_2^{(\mathbb{N})}|$ abzählbar, da wir nach der Reihe jene Elemente aufzählen können, deren größter Eintrag $\neq 0$ an Stelle n ist.
Jedoch ist $(\mathbb{F}_2^{(\mathbb{N})})^\vee \underset{\varphi}{\cong} \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ da wir gegeben $\ell \in (\mathbb{F}_2^{(\mathbb{N})})^\vee$ für jeden Basisvektor von $\mathbb{F}_2^{(\mathbb{N})}$ entscheiden, ob er auf 0 oder 1 mappen soll.
Z.B. ist $(1)_{i=1}^{\infty}$ „in $(\mathbb{F}_2^{(\mathbb{N})})^\vee$ enthalten".
Der Isomorphismus $\varphi : (\mathbb{F}_2^{(\mathbb{N})})^\vee \to \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ ist also gegeben durch $\ell \mapsto (\ell(e_i))_{i=1}^{\infty}$.
Nun ist aber $|\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}|$ nicht abzählbar (Cantor'sches Diagonalargument), also $|\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}| > |\mathbb{F}_2^{(\mathbb{N})}|$ und somit sicherlich $\mathbb{F}_2^{(\mathbb{N})} \not\cong (\mathbb{F}_2^{(\mathbb{N})})^\vee$.