Lineare Algebra - Übungsnotizen 10

Leopold Karl

27. November, 2023

1 WH: Stoff der letzten Woche

- Fertigstellung des Beweises von “Spaltenrang = Zeilenrang” (Einführung von des Begriffes äquivalenter und ähnlicher Matrizen).
- Dualraum

2 Organisatorisches

- Ich freue mich über eure Teilnahme an der Abstimmung für den VMP-Award!

3 Lösung Quiz 9

Frage 1. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

(i) Definiere den Dualraum V^* und die duale Basis $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ von V^*.

(ii) Sei $v = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$. Zeige, dass $e_i^*(v) = a_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt.

Lösung 1.

(i) $V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$ und die duale Basis ist jene Basis, die die folgende Eigenschaft erfüllt: Für alle $i \in [n]$ gilt $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, wobei $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$ die Kronecker-Delta-Funktion bezeichnet.

(ii) Da e_i^* eine Linearform mit obiger Eigenschaft ist, gilt für alle $i \in [n]$:

$$e_i^*(v) = e_i^*(a_1e_1 + \cdots + a_ne_n) = a_1 \cdot e_i^*(e_1) + a_2 \cdot e_i^*(e_2) + \cdots + a_n \cdot e_i^*(e_n) = \sum_{j=1}^{n} a_i\delta_{ij} = a_i.$$

4 Serie 8 - Nachbesprechung

Gemeinsames Besprechen der Wohldefiniertheit von $C_{g,f}$ aus Aufgabe 2.b).

5 Theorie & Beispiele

5.1 Ähnlichkeit

Wann sind 2×2-Matrizen ähnlich zueinander?
Erste Bemerkungen:

- Sie müssen äquivalent zueinander sein. Wann Matrizen äquivalent zueinander sind, wissen wir schon.

- Die Einheitsmatrix ist nur zu sich selbst ähnlich.

Systematisches Herangehen: Berechne die Inverse einer invertierbaren 2×2-Matrix T (im Allgemeinen) und Multipliziere diese von Links und rechts an die gegebene Matrix. Nun erhältst du eine 2×2 Matrix in der bis zu vier Variablen auftauchen und kannst das LGS lösen, dass sich durch das Vergleichen der einzelnen Matrix-Einträge der Gleichung $TAT^{-1} = B$ ergibt. Dies muss man natürlich nur für jene Matrizen durchführen, die schon äquivalent sind, da dies ja nach obiger Bemerkung eine notwendige Bedingung war.
Hinweis: Einfacher und allgemeiner geht das ganze mit der Jordan-Normalform, die ihr im zweiten Semester kennenlernt (siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/Jordansche_Normalform) bzw. mit der Frobenius-Normalform, die normalerweise keine Beachtung in den Lineare Algebra I&II - Kursen findet (siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Frobenius-Normalform).

5.2 Berechnen der dualen Basis

Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}) = (b_1, b_2, b_3)$. Wir wollen die duale Basis $\mathcal{B}^*$ von V^* berechnen.

Bemerke zunächst, dass eine Linearform $l : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die folgende Form hat: $l_{a,b,c}(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}) = ax + by + cz$ für fixierte a, b, c. Dies ist aber gerade das Produkt $\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Allgemeiner funktioniert diese Überlegung für beliebige Vektorräume K^n und wennn V nicht von dieser Form ist, finden wir einen K^n, der isomorph zu V ist (siehe Darstellunsmatrizen).
Nun zur Berechnung der dualen Basis. Die Basisvektoren des dualen Vektorraums b_i* erfüllen per Definition, dass $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$. Das bedeutet, wenn wir $b_1* = l_{a,b,c}$ setzen und a, b, c finden wollen, so müssen die folgenden drei Bedingungen erfüllt sein:

1. $\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix} \cdot b_1 = \begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 1.$
2. $\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix} \cdot b_2 = \begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = 0.$
3. $\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix} \cdot b_3 = \begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = 0.$

Wir müssen also das LGS

$$Av = \begin{pmatrix} - & b_1 & - \\ - & b_2 & - \\ - & b_3 & - \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

lösen. Wir erhalten als Lösung den Vektor $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ und somit $b_1^* : v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto y - \frac{1}{2}z$
Für die anderen Vektoren gehen wir ähnlich vor.

5.3 Evaluationsabbildung

Die Evalutionsabbildung $ev_v : V^* \to K$ ist gegeben durch $l \mapsto l(v)$. Expliziter sei $v = xb_1 + yb_2 + zb_3 \in \mathbb{R}^3$ und $l = \lambda b_1^* + \mu b_2^* + \nu b_3^*$. Dann ist

$$\begin{aligned} ev_v(l) &= ev_{xb_1+yb_2+zb_3}(\lambda b_1^* + \mu b_2^* + \nu b_3^*) = \lambda b_1^* + \mu b_2^* + \nu b_3^*(xb_1 + yb_2 + zb_3) = \\ &= \lambda b_1^*(xb_1 + yb_2 + zb_3) + \mu b_2^*(xb_1 + yb_2 + zb_3) + \nu b_3^*(xb_1 + yb_2 + zb_3) = \lambda \cdot x + \mu \cdot y + \nu \cdot z. \end{aligned}$$

6 Serie 10 - Vorbesprechung

- Theorie zum Dualraum (jedenfalls machen!): Aufgaben 2 & 4.
- Spannende Aufgabe mit Prüfungscharakter: Aufgabe 5.

Kontakt:
Website: www.leopoldkarl.com
Mail: lekarl@student.ethz.ch
LinkedIn: Leopold Karl