Lineare Algebra - Übungsnotizen 9

Leopold Karl

20. November, 2023

1 WH: Stoff der letzten Woche

- Anzahl der Lösungen linearer Gleichungssysteme
- Gruppen und Ringe

2 Organisatorisches

- Ich freue mich über eure Teilnahme an der Abstimmung für den VMP-Award!

3 Lösung Quiz 9

Frage 1. Sei K ein Körper, V, W K-VR. Zeige, dass für lineare Abbildungen $T, S : V \to W$ und ein Skalar $\alpha \in K$ gilt, dass ...

(a) ... $T + S$ linear ist.

(b) ... αT linear ist.

Lösung 1.

(a) Aufgrund der Definition von $T + S$ und der Linearität von T und S gilt für $v, v' \in V, \beta \in K$:

$$(T+S)(v+\beta v') = T(v+\beta v')+S(v+\beta v') = T(v)+\beta T(v')+S(v)+\beta S(v') = (T+S)(v)+\beta(T+S)(v').$$

Folglich ist $T + S$ linear.

(b) Aufgrund der Defininition von αT und der Linearität von T gilt für $v, v' \in V, \beta \in K$:

$$(\alpha T)(v + betav') = \alpha \cdot (T(v) + \beta \cdot T(v')) = (\alpha T)(v) + \beta \cdot (\alpha T)(v').$$

Folglich ist αT linear.

Frage 2. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gl}_n(K)$ eine Gruppe unter Matrix-Multiplikation ist.

Lösung 2. Wir überprüfen die Definition einer Gruppe. Es gilt:

(a) Assoziativität: Seien $A, B, C \in \mathrm{Gl}_n(K)$ mit $A = (a_{ij})_{i,j}, B = (b_{ij})_{i,j}, C = (c_{ij})_{i,j}$. Dann gilt:

$$A(B + C) = (\sum_{i=1}^{n} a_{ki}(b_{ij} + c_{ij}))_{k,j} = (\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ij})_{k,j} + (\sum_{i=1}^{n} a_{ki}c_{ij})_{k,j} = AB + AC.$$

(b) Existenz eines linksneutralen Elements: Die Einheitsmatrix ist linksneutral, da für alle Matrizen, insbesondere für Matrizen $A \in \mathrm{Gl}_n(K)$ gilt, dass $I \cdot A = A$.

(c) Existenz eines Linksinversen: Per Definition von $\mathrm{Gl}_n(K)$ existiert für jede Matrix $A \in \mathrm{Gl}_n(K)$ eine beidseitige Inverse bzgl. der Matrixmultiplikation, insbesondere also eine Linksinverse bzgl. der Matrixmultiplikation.

4 Serie 8 - Nachbesprechung

Viele Aufgaben zu Basiswechsel und eine zu Projektionen; gemeinsames Besprechung der Aufgabe 4 (aus Serie 8).

5 Theorie & Beispiele

Wann kann ich für eine gegebene lineare Abbildung $T: V \to W$ und eine gegebene Darstellungsmatrix A von passender Dimension Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W finden, sodass $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = A$?

Wir bemerken, dass dies genau dann gilt, wenn $A = [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ und da Basiswechselmatrizen invertierbar sind, ist also (siehe Quiz 8, Frage 1) $A \sim [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$. Wir interessieren uns also jetzt dafür, wann zwei Matrizen äquivalent sind. Der folgende Satz gibt darüber Auskunft:

Satz (Klassifikation äquivalenter Matrizen)**.** Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$ sind äquivalent genau dann wenn sie den gleichen Rang haben.

Beweis. Wir verwenden EZU-Matrizen $E_i, F_i \in \mathrm{Gl}_n(K)$, um A und B auf reduzierte Zeilenstufenform zu bringen. Falls notwendig, verwenden wir noch Spaltenumformungen, um nur noch führende Einser zu haben, d.h. $A_r = EAE'$, $B_r = FBF'$, wobei A_r, B_r die reduzierten Matrizen sind, also überall Nulleinträge haben außer potenziell auf der Diagonalen Einser, $E = E_n \cdot \ldots \dot{E}_1$, $F = F_n \cdot \ldots \cdot F_1$ und $E' = E_1' \cdot \ldots \cdot E_n'$, $F' = F_1' \cdot \ldots \cdot F_n'$. Nun haben wir, dass der Rang von A und B unter Multiplikation mit invertierbaren Matrizen erhalten bleibt und dass der Rang der Matrizen gleich der Anzahl der Einser auf der Diagonalen ist. Nach potenzieller Permutation der Einser haben wir $A_r = B_r$, falls A und B gleichen Rang haben, also folgern wir, dass $A = E^{-1}A_rE'^{-1} = E^{-1}PB_rP'E'^{-1} = E^{-1}PFBF'P'E^{-1}$ und damit $A \sim B$. Haben A und B hingegen nicht denselben Rang, so sind sie sicherlich nicht ähnlich, da der Rang bei Multiplikation mit invertierbaren Matrizen erhalten bleibt. $\square$

Somit können wir sofort überprüfen, ob wir überhaupt Basen finden können, sodass A die Darstellungsmatrix von T bzgl. dieser Basen ist, indem wir schauen, ob $Rang([T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}) = \mathrm{rk}(T) = Rang(A)$.

Ein konkretes Beispiel, in dem wir explizit diese Basis berechnen, sei hier angeführt. Wir werden dies kommende Übungsstunde noch gemeinsam durchrechnen.

Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[X], W = \mathbb{R}_{\leq 3}[Y]$, $T: V \to W, aX^2 + bX + c \mapsto aY^2 + b - c$ und seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für welche dieser Matrizen können wir Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W finden, sodass $C = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ für $C \in \{A, B\}$? Finde diese Basen, falls möglich.

Lösung. Wir bemerken, dass $Rang(A) = 2$ und $Rang(B) = 3$ und berechnen $\mathrm{rk}(T) = \dim(\mathrm{im}(T)) = \dim(\langle 1, Y^2\rangle = 2$, also können wir mit obigem Satz nur für A die gewünschten Basen finden.

Wir wissen ebenso, dass es Basen $\mathcal{B}'$ von V und $\mathcal{C}'$ von W gibt, sodass

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: D = [T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}.$$

Da dann für die gesuchten Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ gilt, dass $A = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}[T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$, genügt es die Basen $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{C}'$ zu finden und dann das folgende Basiswechsel-Problem zu lösen: Man bestimme die Basis $\mathcal{B}$ von V, wenn eine Basis $\mathcal{B}'$ von V und eine Basiswechselmatrix $[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ gegeben sind.

Wir suchen zuerst einmal die Basen $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{C}'$. Bemerke dazu, dass $\mathrm{Ker}(T) = \langle (X+1)\rangle$ und $\mathrm{Ker}(A) := \mathrm{Ker}(T_A) = \langle e_3\rangle$. Wir wollen also, dass $\varphi(X+1) = e_3$, damit unser Diagramm kommutiert (siehe Übungsnotizen der vergangenen Woche). Wähle also $\mathcal{B}' = (1, X^2, X+1)$ eine (beliebige)

Erweiterung der Basis von $\mathrm{Ker}(T)$ zu einer geordneten Basis von V, bei der die Basisvektoren von $\mathrm{Ker}(T)$ am Ende stehen und $\mathcal{C}' = (-1, Y^2, Y, Y^3) = (T(1), T(X^2), v_1, v_2)$ eine (beliebige) Erweiterung der Basis des Bildes von T zu einer Basis von W. Wir überprüfen (in diesem konkreten Fall), dass $D = [T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}$:

$$[T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \psi(T(1)) & \psi(T(X^2)) & \psi(T(X+1)) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D,$$

wobei ψ wiederum die Koordinatenabbildung aus unserem kommutativen Diagramm ist.

Tatsächlich, kann man diese Konstruktion relativ schnell für beliebiges T und beliebige Erweiterungen der Basis vom Kern resp. der Basis vom Bild verallgemeinern (der fleißige Leser möge sich dies überlegen).

Als nächstes versuchen wir nun $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ zu finden. Dazu ist es hilfreich $[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ und $[\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$ zu kennen. Diese berechnen wir, indem wir A zuerst in reduzierte Zeilenstufenform bringen und dann noch einige Spaltenumformungen vornehmen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Umformung durch Linksmultiplikation mit

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist (E ist das Produkt der EZU-Matrizen die A in reduzierte Zeilenstufenform bringen). Mittels Rechtsmultiplikation mit der invertierbaren Matrix

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Produkt von Elementaren Spaltenumformungen), finden wir, dass $EAF = D$, also $A = E^{-1}DF^{-1}$ und damit

$$[\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} = E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $[\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} = [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}[\mathrm{id}_W]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}'}$, finden wir, dass

$$[\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}} = [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}([\mathrm{id}_W]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \psi_{\mathcal{E}}(-1) & \psi_{\mathcal{E}}(Y^2) & \psi_{\mathcal{E}}(Y) & \psi_{\mathcal{E}}(Y^3) \\ | & | & | & | \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit finden wir, dass

$$[\mathrm{id}_W]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}} = ([\mathrm{id}_W]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

und damitlesen wir aus den Spalten ab, dass die Basis $\mathcal{C}$ gegeben ist als $c_1 = -1 \cdot 1 + -1 \cdot Y + 0 \cdot Y^2 + -2 \cdot Y^3 = -1 - Y - 2Y^3, c_2 = Y^3, c_3 = Y, c_4 = -3Y + Y^2 - 2Y^3$. Analog geht man für die Basis $\mathcal{B}$ vor, um aus der Basis $\mathcal{B}'$ und der Basiswechselmatrix $[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ die Basis $\mathcal{B}$ zu finden.

Falls Zeit bleibt: Einführung von Gruppen mit Linksneutralem und Linksinversem sowie Untergruppen und Beispiele.

6 Serie 9 - Vorbesprechung

- Darstellungsmatrizen
- Lösen von LGS
- Jedenfalls empfohlen: 3,4,5.

Kontakt:
Website: www.leopoldkarl.com
Mail: lekarl@student.ethz.ch
LinkedIn: Leopold Karl