Lineare Algebra - Übungsnotizen 8

Leopold Karl

13. November, 2023

1 WH: Stoff der letzten Woche

Nach wie vor Basiswechsel- und Darstellungsmatrizen, sowie (in der Vorlesung) Wohldefiniertheit des Rangs einer Matrix, d.h. Zeilenrang(A) = Spaltenrang(A). WH Notation:

Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung, $\dim(V) = n,\ \dim(W) = m$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}$ eine Matrix.

1. $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ ist die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung T bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.
2. $[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ ist eine spezielle Darstellungsmatrix, genannt Basiswechselmatrix. Die zugehörige Abbildung ist die Identität auf V, insbesondere ein Endomorphismus. Wir wechseln von der Basis $\mathcal{A}$ von V in die Basis $\mathcal{B}$ von V.
3. Ausdrücke wie T_A oder L_A bezeichnen die von einer Matrix induzierten Abbildungen. Wenn $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$ ist, ist das also die Abbildung $L_A : K^n \to K^m, v \mapsto Av$.
4. Wann immer wir Darstellungsmatrizen berechnen sollen, wollen wir es uns in jedem Schritt so einfach, wie möglich machen. In der Nachbesprechung der letzten Serie werden wir sehen, dass $[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{CE}$ besonders einfach zu berechnen ist. Folglich vereinfachen wir das Problem eine gewisse Darstellungsmatrix zu finden, wie folgt: $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = [\mathrm{id}_W]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = ([\mathrm{id}_W]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}})^{-1}[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$.

2 Organisatorisches

- Umfragerückmeldungen: Leider keine 25 mit schriftlichem Feedback - nächstes Semester nächste Chance. ;)
  Trotzdem vielen Dank für die zahlreichen positiven Rückmeldungen!
- Anregungen: Etwas ausführlicheres Besprechen der Serien; etwas kürzeres Besprechen des Quizzes; Struktur der Übungsstunde einmal konkret notieren

3 Lösung Quiz 7

Frage 1. Sei K ein Körper. Wir nennen Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$ äquivalent und schreiben $A \sim B$, falls $P \in \mathrm{Gl}_n(K)$ und $Q \in \mathrm{Gl}_m(K)$ existieren mit $A = PBQ$. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$ definiert.

Lösung 1.

1. Reflexivität: Wähle $P = I_n$, $Q = I_m$. Dann gilt $A = PAQ$, also $A \sim A$.
2. Symmetrie: Sei $A \sim B$ mit $A = PBQ$. Wähle $P' = P^{-1}$, $Q' = Q^{-1}$. Dann gilt $B = P'AQ'$, also $B \sim A$.
3. Transitivität: Sei $A \sim B$ und $B \sim C$ mit $A = PBQ$, $B = P'CQ'$. Dann ist $A = PP'CQQ'$ und da $PP' \in \mathrm{Gl}_n(K), QQ' \in \mathrm{Gl}_m(K)$ folgern wir $A \sim C$.

Frage 2. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto Av$ die von A induzierte lineare Abbildung bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ von $\mathbb{R}^2$. Sei $\mathcal{B} = (e_1 + e_2, e_1 - e_2)$. Berechne $[T_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$.

Lösung 2. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $[T_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = [T_A]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$. Wir müssen also nur noch die Basiswechselmatrix $[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$ berechnen. Im Allgemeinen würden wir jetzt die einzelnen Basisvektoren von $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ als Linearkombinationen der Basisvektoren von $\mathcal{E}$ schreiben und die Koeffizienten, die in der Linearkombination von b_i auftauchen in die i-te Spalte der Basiswechselmatrix schreiben. Da $\mathcal{E}$ aber gerade die Standardbasis ist, sehen wir sofort, dass $[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} | & | \\ b_1 & b_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Somit ist $[T_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = [T_A]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

4 Serie 7 - Nachbesprechung

1. Löse LGS $Ax = 0$, um den Kern zu erhalten und wähle Basis von $\mathbb{R}^4$, z.b. $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, um das Bild $\mathrm{im}(L_A) = \langle Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4 \rangle$ zu finden.

2. Benutze den Rangsatz.

3. Direktes Überprüfen der UVR-Definition in (a).
   b)i) gemeinsam in Übungsstunde: Falls T injektiv, definiere $S : W = \mathrm{im}(T) \oplus W' \to V,\ w \mapsto \begin{cases} T^{-1}(w) & \text{falls } w \in \mathrm{im}(T) \\ 0 & \text{falls } w \in W' \end{cases}$ für Basisvektoren w einer Basis $\mathcal{B}_W$, einer Erweiterung einer Basis von $\mathrm{im}(T)$ zu einer Basis von W.
   Existiert hingegen S, so bekommen wir einen Widerspruch zur Wohldefiniertheit von S, falls T nicht injektiv ist.
   Bsp (T injektiv aber nicht invertierbar): $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, v \mapsto v$. Was wäre hier S?

4. Siehe Theorie & Beispiele für eine allgemeinere Besprechung.

5. Wähle $w \in \mathbb{R}^3 \setminus (\mathrm{Ker}(T_A) \cup \mathrm{Ker}(T_A^2))$ (siehe Jordannormalform im 2. Semester).

6. Darstellungsmatrizen berechnen, wie vergangene Stunde besprochen.

5 Theorie & Beispiele

Wann kann ich für eine gegebene lineare Abbildung $T : V \to W$ und eine gegebene Darstellungsmatrix A von passender Dimension Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W finden, sodass $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = A$?

Wir bemerken, dass dies genau dann gilt, wenn $A = [\mathrm{id}_W]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$ und da Basiswechselmatrizen invertierbar sind, ist also (siehe Quiz 8, Frage 1) $A \sim [T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$. Wir interessieren uns also jetzt dafür, wann zwei Matrizen äquivalent sind. Der folgende Satz gibt darüber Auskunft:

Satz (Klassifikation äquivalenter Matrizen)**.** Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{n \times m}(K)$ sind äquivalent genau dann wenn sie den gleichen Rang haben.

Beweis. Wir verwenden EZU-Matrizen $E_i, F_i \in \mathrm{Gl}_n(K)$, um A und B auf reduzierte Zeilenstufenform zu bringen. Falls notwendig, verwenden wir noch Spaltenumformungen, um nur noch führende Einser zu haben, d.h. $A_r = EAE'$, $B_r = FBF'$, wobei A_r, B_r die reduzierten Matrizen sind, also überall Nulleinträge haben außer potenziell auf der Diagonalen Einser, $E = E_n \cdot \ldots \dot{E}_1$, $F = F_n \cdot \ldots \cdot F_1$ und $E' = E'_1 \cdot \ldots \cdot E'_n$, $F' = F'_1 \cdot \ldots \cdot F'_n$. Nun haben wir, dass der Rang von A und B unter Multiplikation mit invertierbaren Matrizen erhalten bleibt und dass der Rang der Matrizen gleich der Anzahl der Einser auf der Diagonalen ist. Nach potenzieller Permutation der Einser haben wir $A_r = B_r$, falls A und B gleichen Rang haben, also folgern wir, dass $A = E^{-1}A_rE'^{-1} = E^{-1}PB_rP'E'^{-1} = E^{-1}PFBF'P'E^{-1}$

und damit $A \sim B$. Haben A und B hingegen nicht denselben Rang, so sind sie sicherlich nicht ähnlich, da der Rang bei Multiplikation mit invertierbaren Matrizen erhalten bleibt. $\square$

Somit können wir sofort überprüfen, ob wir überhaupt Basen finden können, sodass A die Darstellungsmatrix von T bzgl. dieser Basen ist, indem wir schauen, ob $Rang([T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}) = \mathrm{rk}(T) = Rang(A)$.

Ein konkretes Beispiel, in dem wir explizit diese Basis berechnen, sei hier angeführt. Wir werden dies kommende Übungsstunde noch gemeinsam durchrechnen.

Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[X], W = \mathbb{R}_{\leq 3}[Y]$, $T : V \to W, aX^2 + bX + c \mapsto aY^2 + b - c$ und seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für welche dieser Matrizen können wir Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W finden, sodass $C = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ für $C \in \{A, B\}$? Finde diese Basen, falls möglich.

Lösung. Wir bemerken, dass $Rang(A) = 2$ und $Rang(B) = 3$ und berechnen $\mathrm{rk}(T) = \dim(\mathrm{im}(T)) = \dim(\langle 1, Y^2 \rangle = 2$, also können wir mit obigem Satz nur für A die gewünschten Basen finden.

Wir wissen ebenso, dass es Basen $\mathcal{B}'$ von V und $\mathcal{C}'$ von W gibt, sodass

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: D = [T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}.$$

Da dann für die gesuchten Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ gilt, dass $A = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} [T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'} [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$, genügt es die Basen $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{C}'$ zu finden und dann das folgende Basiswechsel-Problem zu lösen: Man bestimme die Basis $\mathcal{B}$ von V, wenn eine Basis $\mathcal{B}'$ von V und eine Basiswechselmatrix $[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ gegeben sind.

Wir suchen zuerst einmal die Basen $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{C}'$. Bemerke dazu, dass $\mathrm{Ker}(T) = \langle (X+1) \rangle$ und $\mathrm{Ker}(A) := \mathrm{Ker}(T_A) = \langle e_3 \rangle$. Wir wollen also, dass $\varphi(X+1) = e_3$, damit unser Diagramm kommutiert (siehe Übungsnotizen der vergangenen Woche). Wähle also $\mathcal{B}' = (1, X^2, X+1)$ eine (beliebige) Erweiterung der Basis von $\mathrm{Ker}(T)$ zu einer geordneten Basis von V, bei der die Basisvektoren von $\mathrm{Ker}(T)$ am Ende stehen und $\mathcal{C}' = (-1, Y^2, Y, Y^3) = (T(1), T(X^2), v_1, v_2)$ eine (beliebige) Erweiterung der Basis des Bildes von T zu einer Basis von W. Wir überprüfen (in diesem konkreten Fall), dass $D = [T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}$:

$$[T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \psi(T(1)) & \psi(T(X^2)) & \psi(T(X+1)) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D,$$

wobei ψ wiederum die Koordinatenabbildung aus unserem kommutativen Diagramm ist.

Tatsächlich, kann man diese Konstruktion relativ schnell für beliebiges T und beliebige Erweiterungen der Basis vom Kern resp. der Basis vom Bild verallgemeinern (der fleißige Leser möge sich dies überlegen).

Als nächstes versuchen wir nun $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ zu finden. Dazu ist es hilfreich $[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ und $[\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$ zu kennen. Diese berechnen wir, indem wir A zuerst in reduzierte Zeilenstufenform bringen und dann noch einige Spaltenumformungen vornehmen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Umformung durch Linksmultiplikation mit

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist (E ist das Produkt der EZU-Matrizen die A in reduzierte Zeilenstufenform bringen). Mittels Rechtsmultiplikation mit der invertierbaren Matrix

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Produkt von Elementaren Spaltenumformungen), finden wir, dass $EAF = D$, also $A = E^{-1}DF^{-1}$ und damit

$$[\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} = E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $[\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} = [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}[\mathrm{id}_W]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}'}$, finden wir, dass

$$[\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}} = [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}([\mathrm{id}_W]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \psi_{\mathcal{E}}(-1) & \psi_{\mathcal{E}}(Y^2) & \psi_{\mathcal{E}}(Y) & \psi_{\mathcal{E}}(Y^3) \\ | & | & | & | \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit finden wir, dass

$$[\mathrm{id}_W]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}} = ([\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

und damitlesen wir aus den Spalten ab, dass die Basis $\mathcal{C}$ gegeben ist als $c_1 = -1 \cdot 1 + -1 \cdot Y + 0 \cdot Y^2 + -2 \cdot Y^3 = -1 - Y - 2Y^3, c_2 = Y^3, c_3 = Y, c_4 = -3Y + Y^2 - 2Y^3$. Analog geht man für die Basis $\mathcal{B}$ vor, um aus der Basis $\mathcal{B}'$ und der Basiswechselmatrix $[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ die Basis $\mathcal{B}$ zu finden.

6 Serie 8 - Vorbesprechung

Aufgaben 1,3,5,6,7 super Übungsaufgaben zum Durchrechnen; 2 und 4 mit etwas Theorie - potentiell für Mathematiker interessanter.

Kontakt:
Website: www.leopoldkarl.com
Mail: lekarl@student.ethz.ch
LinkedIn: Leopold Karl