Bsp. Basiswechselmatrix

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\wr\ \varphi_{B_V}"'] & W \arrow[d, "\wr\ \varphi_{B_W}"] \\ K^n \arrow[r, "L_A"] & K^m \end{tikzcd}$$

Seien V, W $\mathbb{C}$-VR, $T: V \to W$ eine lineare Abbildung, $\varphi_{B_V}, \varphi_{B_W}$ die Isomorphismen von $V \to \mathbb{C}^{\dim(V)}$, $\mathbb{C}^{\dim(W)} \to W$. L_A jene durch eine Matrix induzierte lineare Abbildung, die das obige Diagramm kommutieren lässt.

Wir betrachten nun $V = \mathbb{C}^3$, $B_V = \left\{ \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$,
$W = \mathbb{C}^2$, $B_W = \left\{ \overset{w_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix}} \right\}$, sowie die lineare Abb. $T: \mathbb{C}^3 = V \to W = \mathbb{C}^2$, gegeben durch $T(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $T(v_2) = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \end{pmatrix}$, $T(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und wollen A finden.

Wir wissen, dass $L_A = \varphi_{B_W} \circ T \circ \varphi_{B_V}^{-1}$ und, dass wegen $L_A(e_i) = A e_i = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} e_i = a_i$, die Matrix A eindeutig bestimmt ist durch die Bilder von e_i's unter L_A.

Wir berechnen:

$$a_1 = L_A(e_1) = \varphi_{B_W} \circ T \circ \varphi_{B_V}^{-1}(e_1) = \varphi_{B_W} \circ T(v_1) = \varphi_{B_W}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} =$$
$$= \varphi_{B_W}(1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2) = 1 \cdot \varphi_{B_W}(w_1) + 1 \cdot \varphi_{B_W}(w_2) =$$
$$e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & | & | \\ 1 & a_2 & a_3 \\ & | & | \end{pmatrix}$$

$$a_2 = L_A(e_2) = \varphi_{B_W} \circ T \circ \varphi_{B_V}^{-1}(e_2) = \varphi_{B_W} \circ T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi_{B_W}\begin{pmatrix} 2i \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$2i\, \varphi_{B_W}(w_1) + 0 \cdot \varphi_{B_W}(w_2) = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2i & | \\ 1 & 0 & a_3 \\ & & | \end{pmatrix}$$

$$a_3 = L_A(e_3) = \varphi_{B_W} \circ T(v_3) = \varphi_{B_W}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i \cdot \varphi_{B_W}\begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} = i \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2i & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Berechnen von Kern & Bild

1. Kern

Wähle eine Basis B_V von V, B_W von W.

Finde diese Basiswechselmatrix A mit $L_A = \varphi_{B_W} \circ T \circ \varphi_{B_V}^{-1}$

Löse LGS: $\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right)$. Transformiere die gefundenen Vektoren im K^n mittels $\varphi_{B_V}^{-1}$ zurück nach V.

2. Bild

$\operatorname{im}(T) = \langle T(v_1), \dots, T(v_n) \rangle$.

Falls Basiswechselmatrix vorhanden bemerke, dass

$T(v_i) = \varphi_{B_W}^{-1} \circ L_A \circ \varphi_{B_V}(v_i) = \varphi_{B_W}^{-1} \circ L_A(e_i) = \varphi_{B_W}^{-1}(a_i)$.

Lies also aus den Spalten a_i's ab und bilde mit $\varphi_{B_W}^{-1}$ nach W ab um $\operatorname{im}(T)$ zu erhalten.

Bsp.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2i & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}$ wie im Bsp. Basiswechselmatrix

1. $\operatorname{Kern}(T) = \{ v \in V \mid \varphi_{B_V}(v) = x \text{ ist Lösung von } Ax = 0 \}$

Löse $Av = 0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & i & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & i & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & -2i & i & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -iz \\ \frac{z}{2} \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{C} \right\}$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}(T) = \varphi_{B_V}^{-1}(\mathbb{L}) = \{ -iz \cdot v_1 + \frac{z}{2} v_2 + z v_3 \mid z \in \mathbb{C} \} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{z}{2} - iz \\ \frac{z}{2} + iz \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{C} \right\}$

Passende Basis zu gegebener Basiswechselmatrix finden

Wir müssen beachten, dass jene Vektoren, die im Kern von T liegen, auch gerade $\varphi_{B_V}(v) \in \mathrm{Ker}(A)$ erfüllen und jene, die nicht im Kern liegen, nicht. Wähle also eine Basis B_V von V so, dass zuerst eine Basis von Kern von T gewählt wird und diese dann zu einer Basis von V erweitert wird. Was im Bild passiert, richten wir durch die Wahl der Basis B_W.

Seien nun $v_j, \dots, v_n$ jene Basisvektoren von V mit $T(v_i) \neq 0$ $i \in \{j, \dots, n\}$. Dann sind diese so ~~gd~~ gewählt, dass $L_A \circ \varphi_{B_V}(v_i) = b_i \neq 0$ und wir können eine Basis B_W von W finden mit $\varphi_{B_W}^{-1}(b_i) = T(v_i)$ indem wir $e_1^W, \dots, e_m^W$ durch die Vektoren $b_j, \dots, b_n$ ausdrücken und dann bemerken, dass

$$e_k^W = \sum_{i=j}^{n} B_i b_i \Rightarrow w_k = \begin{pmatrix} | & & | \\ w_1 & \cdots & w_m \\ | & & | \end{pmatrix} e_k^m = \varphi_{B_W}^{-1}(e_k^W) = \varphi_{B_W}^{-1}\Big(\sum_{i=j}^{m} B_i b_i\Big) =$$
$$= \sum_{i=j}^{m} B_i \varphi_{B_W}^{-1}(b_i) = \sum_{i=j}^{m} B_i T(v_i) \leftarrow \text{alles bekannt.}$$

Bsp. (Continued): Suche Basis s.d. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Darstl. Mat von T.

Wir kennen die Basis $\begin{pmatrix} 1/2 - i \\ 1/2 + i \\ 1 \end{pmatrix}$ vom $\mathrm{Ke}(T)$, also

Sei $B_V = \left\{ e_1^V, e_2^V, \begin{pmatrix} 1/2 - i \\ 1/2 + i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ unsere Basis von V.

Dann ist $b_1 = e_1^W$, $b_2 = e_2^W$. Wir suchen also eine Basis von W, B_W, mit $\varphi_{B_W}^{-1}(e_1^W) = T(v_1) = \binom{2i}{0} + i \cdot \binom{0}{1} =$
$= \binom{2i}{i}$ und $\varphi_{B_W}^{-1}(e_2^W) = T(v_2) = \binom{0}{-i}$.

Da aber $\varphi_{B_W}^{-1}(e_i^W) = w_i$, folgt schon dass $B_W = \{ w_1 = \binom{2i}{i}, w_2 = \binom{0}{-i} \}$ eine passende Basis ist.