Lineare Algebra - Übungsnotizen 6

Leopold Karl

30. Oktober, 2023

1 WH: Stoff der letzten Woche

Lineare Abbildungen

Definition. Seien V, W Vektorräume über dem Körper K, $T : V \to W$ eine wohldefinierte Abbildung. Dann nennt man T linear, falls:

1. $\forall v, w \in V : T(v + w) = T(v) + T(w)$
2. $\forall v \in V, \forall \alpha \in K : T(\alpha v) = \alpha T(v)$.

Grundlegende Eigenschaften. Seien V, W, U Vektorräume über dem Körper K, $T : V \to W, S : W \to U$ lineare Abbildungen. Dann gelten die folgenden grundlegenden Eigenschaften linearer Abbildungen

- $T(0_V) == 0_W$
- $S \circ T$ ist linear
- Die lineare Abbildung T ist eindeutig bestimmt durch die Bilder einer Basis von V.
- Jede lineare Abbildung von endlichdimensionalen Vektorräumen lässt sich „in Matrix-Form“ darstellen, d.h. von der Form $T(v) = Av$ für eine Matrix $A \in Mat_{m,n}$, wobei $n := \dim(V)$, $m := \dim(W)$.

2 Organisatorisches

- Bitte Umfrage ausfüllen! Wie abgemacht gibt es eine kleine Belohnung, falls ich zahlreiche und ausführliche Rückmeldungen erhalte.
- Erinnerung: Serie wie folgt abspeichern: #(Seriennummer)_NachnameVorname, z.B.: 4_KarlLeopold.
- Erinnerung: Namen im oberen rechten Eck der ersten Seite der Serie notieren!

3 Lösung Quiz 6

Frage 1. Sei $T_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben wie unten. Welche dieser Abbildungen sind linear?

1. $T_1(x, y, z) = (|x|, -z, 0)$
2. $T_2(x, y, z) = (x, z, z - x)$
3. $T_3(x, y, z) = (x, yz, x)$

Lösung 1.

1. Nein: $(-1) \cdot T((1, 1, 1)) = (-1, 1, 0) \neq (1, 1, 0) = T((-1) \cdot (1, 1, 1))$.

2. Ja: Überprüfe Def. einer linearen Abbildung.

3. Nein: $2 \cdot T(1,1,1) = (2,2,2) \neq (2,4,2) = T(2 \cdot (1,1,1))$

Frage 2. Sei $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \mid x+y+z=0\} \subseteq V$ und $W = \{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \in V \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq V$ Untervektorräume von V. Ist W ein Komplement von U?

Lösung 2. Zuerst bemerken wir, dass $W \cap U = \{0\}$, da $x + x = 0 \implies x = 0$. Außerdem bemerken wir, dass $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ und $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \subseteq U$ (eigentlich gilt auch bei U Gleichheit; Da wir diese aber nicht benötigen und dafür z.B. lineare Unabhängigkeit überprüfen und einen Dimensionsvergleich durchführen müssten, arbeiten wir mit der Inkludion).

Behauptung: $\mathbb{R}^3 = \langle w \rangle + \langle u_1, u_2 \rangle \coloneqq \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \subseteq W + U \subseteq \mathbb{R}^3$.

Beweis. Das einzige, was zu zeigen ist, ist die erste Gleichung. Für diese genügt es zu zeigen, dass (w, u_1, u_2) eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Sobald wir gezeigt haben, dass diese drei Vektoren linear unabhängig ist, können wir sofort aus einem Dimensionsvergleich ($\dim(\langle w, u_1, u_2 \rangle) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$) schließen, dass (w, u_1, u_2) eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Wir zeigen also lineare Unabhängigkeit: Seien dazu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$: $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 w = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. Dann folgt aus der zweiten Komponente der Vektorgleichung, dass $\lambda_2 = 0$ und in weiterer Folge aus der ersten Komponente ($\lambda_1 + \lambda 3 = 0$) gemeinsam mit der dritten ($-\lambda_1 + \lambda_3 = 0$), dass $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ und somit lineare Unabhängigkeit. $\square$

4 Theorie & Beispiele

1. **Lemma.** EZU's erhalten den Spaltenrang.

   Beweis. Da EZU's invertierbare Matrizen sind, folt mit Aufgabe 6 der Serie 5, dass die maximale linear unabhängige Teilmenge der Spalten von $B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \dots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ gleich der maximalen linear Unabhängigen Teilmenge von $A \cdot B = \begin{pmatrix} | & & | \\ Ab_1 & \dots & Ab_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ ist, wobei A eine EZU ist. Dies heißt aber per Definition des Spaltenrangs gerade Spaltenrang(B) = Spaltenrang(AB). $\square$

2. Bsp. Endlich-Dimensionalität: $K^n, Mat_{n\times n}$
   Gegenbsp: Raum der Folgen (über K) $\supseteq$ Raum der Folgen, die fast überall null sind.

3. Um auf diese Art und Weise auch den Zeilenrang zu berechnen, betrachte man die Transponierte Matrix: Ist $B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \dots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix} \in Mat_{n,m}$, so ist die Transponierte von B definiert als $B^T \coloneqq \begin{pmatrix} — & b_1 & — \\ & \vdots & \\ — & b_n & — \end{pmatrix}$.

4. Intuition Komplement im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ (an Tafel).

5. Zerlegung von Vektorräumen in Untervektorräume
   Zerlege in min. zwei Untervektorräume: $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \subseteq \mathbb{C}^4, K[X]$ (e.g. $K[X] = U_{ev} \oplus U_{odd} \coloneqq \langle X^n \mid n \equiv_2 0 \rangle \oplus \langle X^n \mid n \equiv_2 1 \rangle$);

   Finde einen komplementären Untervektorraum W zu $U \coloneqq \langle \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \} \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, d.h. einen Untervektorraum $W \subseteq V$, sodass $U \oplus W = V$, also $U + W = V$ und $U \cap W = \{0_V\}$.

6. Intuition Quotientenraum im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ (an Tafel); für formale Definition siehe Serie 6, Aufgabe 4.

5 Serie 6 - Vorbesprechung

Beispiele und Berechnungen von linearen Abbildungen, Komplementen und Spalten- und Zeilenrang. Wichtiges theoretisches Resultat: Der Quotientenvektorraum (Aufgabe 4).

Kontakt:
Website: www.leopoldkarl.com
Mail: lekarl@student.ethz.ch
LinkedIn: Leopold Karl