Lineare Algebra - Übungsnotizen 5

Leopold Karl

23. Oktober, 2023

1 Überblick: Stoff der letzten Wochen

- Vektorräume
- Lineare Unabhängigkeit
- Basen von Vektorräumen

2 Organisatorisches

- Erinnerung: Serie wie folgt abspeichern: #(Seriennummer)_NachnameVorname, z.B.: 4_KarlLeopold.
- Erinnerung: Namen im oberen rechten Eck der ersten Seite der Serie notieren!
- Ausführlichere Übungsnotizen? - Wer liest die Übungsnotizen/wem helfen sie wirklich?
- Sehr cool, dass manche ihre Serie tippen! Hinweis: Familiarität mit LaTeX kommt einem im Laufe des Studiums zugute.

3 Lösung Quiz 5

Frage 1. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ist $\{v_1, v_2, v_2\}$ linear unabhängig?

Lösung 1. Zuerst die Lösung, die direkt die Definition der linearen Unabhängigkeit verwendet: Durch geschicktes Probieren, das in Folge kurz beschrieben sein soll, findet man, dass $2v_1 + 3v_2 + v_3 = 0$, also $\{v_1, v_2, v_3\}$ nicht linear unabhängig ist. Es sei hier noch bemerkt, dass das konkrete Angeben der obigen Gleichung schon genügt, um zu zeigen, dass die Vektoren linear abhängig sind. Was folgt ist der Versuch, den Weg, wie man diese Koeffizienten findet, also „geschickt probiert", möglichst detailliert zu beschreiben.

Das geschickte Probieren könnte wie folgt aussehen: Wir betrachten die Linearkombination $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ und setzen sie gleich null, um die Situation der Definition der linearen Unabhängigkeit vor uns zu haben.
Bemerke nun zuerst, dass die zweite Komponente von v_2 gleich 0 ist, also $\alpha_1 - 2 \cdot \alpha_2 = 0$ sein muss. Da wir mit „schönen"Zahlen arbeiten wollen und wir eine Lösung $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha 3)$ von $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ stets um einen Faktor skalieren können, probieren wir einmal aus, was passiert, wenn wir $\alpha_1 = 2, \alpha_3 = 1$ wählen (der willige Leser möge die obige Aussage über die Wahl einer „schönen"Lösung formalisieren und beweisen). Tatsächlich erhalten wir: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 2v_1 + \alpha_2 v_2 + v_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 3 \cdot \alpha_2 \\ 0 \\ -3 + \alpha_2 \end{pmatrix}$. Damit dieser $\begin{pmatrix} 9 - 3 \cdot \alpha_2 \\ 0 \\ -3 + \alpha_2 \end{pmatrix} = 0_V$ der Nullvektor ist, muss bei Betrachtung

der dritten Komponente $\alpha_2 = 3$ gelten. Tatsächlich löst dies auch die Gleichung $9 - 3 \cdot \alpha_2 = 0$ in der ersten Komponente, womit wir die nichttriviale Darstellung der Null, $0 = 2v_1 + 3v_2 + v_3$, gefunden haben. Tatsächlich hätte $\alpha_2 = 3$ nicht für beide Gleichungen gepasst, wenn die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig gewesen wären. Man überlege sich dies als Übung und betrachte insbesondere den abgeänderten Fall $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Vorbereitung.

Lösung 2. Wir verwenden die Aussage der Serie 5, Aufgabe 6: Sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $v_1, \dots, v_m \in V$ Vektoren. Sei des weiteren $A \in GL_n(K)$ eine invertierbare Matrix. Dann ist $\{v_1, \dots, v_m\}$ linear unabhängig genau dann wenn $\{Av_1, \dots, Av_m\}$ linear unabhängig ist. Schreiben wir nun also die Vektoren als Spalten in eine Matrix $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und führen Zeilenumformungen durch, so erhalten wir eine invertierbare Matrix W und eine Matrix A' in Zeilenstufenform mit $WA = A'$ und die Spaltenvektoren von A' sind nach obiger Aussage linear unabhängig genau dann wenn v_1, v_2, v_3 es sind.

Konkretes durchführen dieser Zeilenumformungen liefert:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{P(1,2),S(1,2,-4),S(1,3,2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{M(2,-3),S(2,3,-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

und wir bemerken, dass die Spalten von $A' = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ | & | & | \end{pmatrix}$ linear abhängig sein, da $2v_1' + 3v_2' + v_3' = 0$. Somit sind also auch v_1, v_2, v_3 linear abhängig. Bemerke noch, dass wir W in gewohnter Weise erhalten, in dem wir die zu den durchgeführten EZUs gehörenden Matrizen in verkehrter Reihenfolge miteinander multiplizieren, d.h. $W = M_{E_5} \cdot \ldots M_{E_1}$, wobei M_{E_i} die zur i-ten durchgeführten EZU gehörende Matrix ist.

Frage 2. Sei $V = \mathbb{Q}^4$, $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \in V \mid x - 3y - w = 0\} \end{pmatrix}$ ein Unterraum von V. Bestimme die Dimension und finde eine Basis von U

Lösung 3. Bemerke, dass wir vier freie Variablen und eine Gleichung gegeben haben, die Dimension also drei sein muss. Um eine Basis zu finden, betrachten wir die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die allesamt die Gleichung erfüllen. Mit untenstehenden Methoden finden wir heraus, dass diese linear unabhängig sind und aufgrund der Dimension von U auch schon U aufspannen. Somit ist (v_1, v_2, v_3) eine Basis von U.

4 Serie 4 - Nachbesprechung

1. Keine Anmerkungen.

2. Zur Notation eines Erzeugendensystems: Wenn nach einem Erzeugendensystem gefragt ist, gib dieses als Menge, z.B. $\{v_1, v_2, v_3\}$ und nicht als Span, z.B. $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ an. Es gilt zwar, dass

$\langle\{v_1, v_2, v_3\}\rangle = \langle\langle v_1, v_2, v_3\rangle\rangle$, also $\{v_1, v_2, v_3\}$ und $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ den gleichen Unterraum erzeugen, aber wenn wir $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ als Erzeugendensystem wählen ist dieses „unnötig groß“.

3. Manchen war das Setting nicht ganz klar: Die Funktionen sind hier unsere Vektoren und der Nullvektor ist die Nullfunktion $0_{\mathcal{F}}$ mit $\forall x \in X : 0_{\mathcal{F}}(x) = 0$.

4. Stelle ein passendes lineares Gleichungssytem auf und löse es.

5. Ich habe viele kreative Lösungen erhalten, aber eigentlich ist dies ein mechanischer Prozess: Seien im Allgemeinen $v_1, \dots, v_m$ Vektoren im K^n, dann schreibe diese zeilenweise in eine Matrix $M = \begin{pmatrix} — & v_1 & — \\ & \vdots & \\ — & v_m & — \end{pmatrix}$. Löse nun das LGS $Ax = 0_{K^n}$ und finde eine Basis der Lösungmenge: $(w_1, \dots, w_r)$. Bilde nun wiederum zeilenweise die Matrix $L = \begin{pmatrix} — & w_1 & — \\ & \vdots & \\ — & w_r & — \end{pmatrix}$.
   Behauptung: Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des LGS $Lx = 0_{K^n}$ ist gerade $\langle v_1, \dots, v_m\rangle$. Insbesondere gilt, falls U ein Untervektorraum von V ist und $\{v_1, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von U, dass $U = \mathbb{L}$ (als Mengen; $\mathbb{L}$ hat ja a priori keine Vektorraumstruktur).
   Begründung: Per Konstruktion der Vektoren $w_1, \dots, w_r$ gilt für alle v_i, dass $\forall i, j : v_i^T \cdot w_j = 0$ und damit auch $\forall j : z^T \cdot w_j = 0$ für $z \in \langle v_1, \dots, v_m\rangle$, Linearkombinationen der v_i's. Man überprüft direkt anhand der Definition des Matrixproduktes, dass damit auch $\forall j : w_j^T \cdot z = 0$ und also $\langle v_1, \dots, v_m\rangle \subseteq \mathbb{L}$. Andererseits hat $\langle w_1, \dots w_r\rangle$ Dimension r und da wir für das erste LGS ($Mx = 0_{K^n}$)) gerade einen r-dimensionalen Lösungsraum erhalten haben, hatten wir genau eine $n - r$-dimensionale linear unabhängige Menge unter den $v_1, \dots, v_m$. Da die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ auch gerade $n - r$-dimensional ist (n Variablen, r Gleichungen), folgt aus Satz 3.4.2 aus dem Skript die Gleichheit.

6. Im Großen und Ganzen gut gegangen.

5 Theorie & Beispiele

1. Vektordarstellungen in endlichdimensionalen Vektorräumen: Wenn wir einen endlichdimensionalen Vektorraum V über einem Körper K mit $\dim V = n$ haben, dann können wir dessen Vektoren wie folgt in der gewohnten Schreibweise $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ darstellen: Wir wählen eine Basis von $v_1, \dots, v_n$ von V stellen nun einen Vektor $w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in V$ als „$w = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$“ dar, merken uns also nur die Koeffizienten. Formaler haben wir einen Vektorraumisomorphismus $\phi : V \to K^n, w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ mit Inversem $\phi^{-1} : K^n \to V, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. Somit können wir komplizierter wirkende (endlichdimensionale) Vektorräume in das gewöhntere Setting eines K^n Vektorraums übersetzen, dort unsere Methoden, insbesondere all jene, die Matrizen benötigen, anwenden und wieder zurück übersetzen.

2. Beispiele von (Standard)Basen:

   (a) $(e_i)_{i=1}^n$ von K^n, wobei $e_i := (\delta_i j)_j$

(b) $(\delta_y : X \to K_{y \in X})_y$ vom Funktionenraum $\mathcal{F}$ der Funktionen von einer Menge X in einen Körper K, wobei δ_y wiederum die Kronecker-Delta-Funktion ist: $\delta_y(x) = \begin{cases} 1 & \mid x = y \\ 0 & \mid sonst \end{cases}$

3. Methoden, um Lineare Unabhängigkeit zu überprüfen:

   (a) Dimensionsvergleiche: Eine linear unabhängige Menge $S \subseteq V$ kann nie großer sein als die Dimension des Vektorraums V, ein Erzeugendensystem nie kleiner.

   (b) Direktes Einsetzen in Definition und Lösen des LGS $Ax = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} x = 0$. Falls die Lösungmenge $\mathbb{L} = \{0_V\}$, dann sind die Vektoren linear unabhängig, sonst nicht.

   (c) Vereinfachung von (b): Wir müssen das LGS gar nicht lösen, um lineare Unabhängigkeit festzustellen. Es genügt, dass wir in der Matrix $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ auf Zeilenstufenform bringen und sie dort r Pivots hat, da wir dann Serie 5 Aufgabe 6 verwenden können.

4. Finden eines minimales Erzeugendensystem (=Basis) eines Untervektorraums:
   Sei $U = \langle v_1, \cdot v_n$ ein Untervektorraum von V. Um eine maximale linear unabhängige Teilmenge (=Basis) in $\{v_1, \dots, v_n\}$ zu finden, verwenden wir abermals Serie 5 Aufgabe 6 (Invarianz von Linearer Unabhängigkeit unter invertierbaren Matrizen) und bringen also die Matrix $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ in Zeilenstufenform. Die Menge aller Spalten, die einen Pivot besitzen, korrespondiert also zu einer maximalen Teilmenge linear unabhängiger Vektoren von $\{v_1, \dots, v_n\}$.

5. Überprüfen, ob ein Vektor in einem Untervektorraum liegt:
   Sei $U = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ein Untervektorraum von V, w ein Vektor für den wir überprüfen wollen, ob $b \in U$. Löse dazu das LGS $Ax = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} x = b$ wie gewohnt mit Zeilenumformungen angewandt auf $(A|b)$. Ist die Lösungsmenge leer, so liegt b nicht in U, sonst schon.

6. Basiserweiterungssatz als Korollar des Austauschsatzes

7. Zerlegung von Vektorräumen in Untervektorräume
   Zerlege in min. zwei Untervektorräume: $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \subseteq \mathbb{C}^4, K[X]$ (e.g. $K[X] = U_{ev} \oplus U_{odd} := \langle X^n \mid n \equiv_2 0 \rangle \oplus \langle X^n \mid n \equiv_2 1 \rangle$);
   Finde einen komplementären Untervektorraum W zu $U := \langle \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \} \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, d.h. einen Untervektorraum $W \subseteq V$, sodass $U \oplus W = V$, also $U + W = V$ und $U \cap W = \{0_V\}$.

8. Bsp. Endlich-Dimensionalität: $K^n, Mat_{n \times n}$
   Gegenbsp: Raum der Folgen (über K) $\supsetneq$ Raum der Folgen, die fast überall null sind.

6 Serie 5 - Vorbesprechung

Aufgabe 6 ist ein Lemma, dass wir in der Übungsstunde viel benutzt haben, um zu zeigen, dass gewisse Methoden funktionieren. Es lohnt sich also, dieses auch nachzuvollziehen und zu beweisen.

Die restlichen Aufgaben sind allesamt gute Übungen, um sich an die Begriffe „lineare (Un-)Abhängigkeit“, „Basis“, sowie an den „Span“ und „Erzeugendensysteme“ zu gewöhnen. Ich empfehle, so viel wie irgendwie möglich davon zu machen, da dies der Intuition sehr hilft und die Aufgaben Standard-Teilaufgaben jeder LinAlg-Prüfung sind.

Kontakt:
Website: www.leopoldkarl.com
Mail: lekarl@student.ethz.ch
LinkedIn: Leopold Karl