

Lineare Algebra - Übungsnotizen 4

Leopold Karl

16. Oktober, 2023

1 Überblick: Stoff der letzten Wochen

- Elementare Zeilenoperationen
- Lineare Gleichungssysteme
- Vektorräume
- Basen von Vektorräumen

2 Organisatorisches

- Erinnerung: Serie wie folgt abspeichern: #(Seriennummer)_NachnameVorname, z.B.: 4_KarlLeopold.
- Erinnerung: Namen im oberen rechten Eck der ersten Seite der Serie notieren!
- Feedback zur Übungsstunde
- Antwort auf Frage: Besuch anderer Übungsstunden möglich

3 Lösung Quiz 4

Frage 1. Siehe Satz 3.2.2 im Skript.

Frage 2. Überprüfe die Unterraumaxiome.

4 Serie 3 - Nachbesprechung

1. Super für Intuition bzgl. Matrizen (Bsp. (a): Kommutativität)
2. LGS lösen
3. EZUs in Matrixdarstellung (siehe unten)
4. LGS lösen

5 Theorie & Beispiele

1. EZUs durch Linksmultiplikation mit Matrizen: $P(r, s)$ (mit Permutationsmatrix), $M(r, \lambda)$ (mit Diagonalmatrix: alle Diagonaleinträge = 1 bis auf einen = λ), $S(r, s, \lambda)$ (mit Identität + Elementarmatrix $E(s, r, \lambda)$)
 2. Vektorräume & Untervektorräume kurze mündliche WH (Bsp: $Mat_{n \times n}, \mathbb{F}_p^n, K[X]$)
-

3. Checkliste für $U \subseteq V$ ist (kein) Unterraum:
 - (a) $0_V \in U$?
 - (b) abgeschlossen unter Addition?
 - (c) abgeschlossen unter Skalarmultiplikation?
4. erste (Gegen-) Bsp. von Unterräumen:
 - (a) untere Dreiecksmatrizen $=: U' \subseteq \text{Mat}_{n \times n}$
 - (b) $\text{Mat}_{2 \times 2} \supseteq U'' :=$ Teilmenge der nicht-invertierbaren Matrizen
 - (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{F}_7^3 \mid 2x + y = 0\} \subseteq \mathbb{F}_7^3$
 - (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{F}_7^3 \mid 2|x\} \subseteq \mathbb{F}_7^3$
5. Lineare Hülle
Bsp: $\langle \{(0, 4, 0), (0, 5, 0), (0, 3, 1)\} \rangle = ???$
6. LGS mit Lösungsmenge = Unterraum aufstellen
7. Zerlegung von Vektorräumen in Untervektorräume
Zerlege in min. zwei Untervektorräume: $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \subseteq \mathbb{C}^4, K[X]$;
Ergänze zum ganzen Vektorraum: $\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$
8. (Endlich-Dimensionalität: $K^n, \text{Mat}_{n \times n}$
Gegenbsp: Raum der Folgen (über K) \supseteq Raum der Folgen, die fast überall null sind.)
9. (Basiserweiterungssatz als Korollar des Austauschsatzes)

6 Serie 4 - Vorbesprechung

1. Super wichtig, um ein Gefühl für (Unter-)Vektorräume zu bekommen.
2. Ebenso.
3. Zerlegung von Unterräumen (siehe Theorieblock)
4. Arbeiten mit Linearer Hülle
5. LGS aufstellen (siehe Theorieblock)
6. Allgemeinere Aussagen/Generieren von Bsp. von Unterräumen.