6. a) Sei $x \in \mathbb{R}^4$ bel., $v, w \in \mathbb{R}^4$: $F(v) = F(w)$. Dann gilt

$$s(v-w, x) = s(F(v-w), F(x)) = s(F(v) - F(w), F(x)) = s(0, F(x)) = 0$$

Durch Wahl von $x = e_i$, $i \in \{1,2,3,4\}$ erhalten wir $v_x = w_x$, $v_y = w_y$, $v_z = w_z$, $v_t = w_t$ und somit $v = w$. Damit ist F inj. und da $\dim \mathbb{R}^4 = 4 < \infty$ folgt mit dem Rangsatz [$\dim V = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Bild}\varphi$], dass F surj. ist.

b) Direkte Rechnungen

i) $T = B \overbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}}^{J} B^T \in O(3)$ [ihr habt gesehen, dass ein so ein Drehblock und ± 1 in einem Eintrag durch Basisw. orthon. erreicht werden können]

$$s(F(v), F(w)) \overset{*)}{=} s\left(\begin{pmatrix} Tv' \\ \pm t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Tw' \\ \pm t \end{pmatrix}\right) = s\left(\begin{pmatrix} BJB^Tv' \\ \pm t_v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} BJB^Tw' \\ \pm t_w \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \langle BJB^Tv', BJB^Tw' \rangle_{\mathbb{R}^3} - c\, t_v t_w = v'^T \underbrace{BJ^TB^TBJB^T}_{id} w' - c\, t_v t_w = x_v x_w + y_v y_w + z_v z_w - c\, t_v t_w = s(v, w)$$

$*)$ $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ t_v \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ t_w \end{pmatrix}$, $v' = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$, $w' = \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix}$.

Außerdem ist F linear, da es als Linksmultipl. mit einer Matrix dargestellt werden kann, und somit ist F eine Isometrie.

ii) $$s(F(v), F(w)) = s\left(\begin{pmatrix} x_v\gamma - v\gamma t_v \\ y_v \\ z_v \\ -v\gamma x_v + \gamma t_v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_w\gamma - v\gamma t_w \\ y_w \\ z_w \\ -v\gamma x_w + \gamma t_w \end{pmatrix}\right) =$$

viele Terme in x- & t-Komp. kürzen sich

$$\overset{c=1}{=} x_v x_w (\gamma^2 - v^2\gamma^2) + y_v y_w + z_v z_w + t_v t_w (v^2\gamma^2 - \gamma^2) \overset{*)}{=} s(v, w)$$

$*)$ $\gamma^2 - v^2\gamma^2 = \dfrac{1}{1-v^2} - \dfrac{v^2}{1-v^2} = 1 = -(v^2\gamma^2 - \gamma^2)$.

Da F durch Linksmultiplikation mit Matrix gegeben ist, folgt dass F auch linear ist und damit eine Isometrie.

6.c) Beh. 1: $\exists U < M$: $\dim U = 2$, U ist φ-invariant

Bew. 1: (WH) Def: U ist φ-inv. $\Leftrightarrow$ $\varphi(U) \subseteq U$.

Betrachte $p_\varphi(x)$. Dies zerfällt über $\mathbb{R}$ in lineare und quadratische irreduzible Faktoren. Die verallgemeinerte (Block-) JNF gibt uns nun wie folgt φ-inv. Unterräume:

$[\varphi] = BJ([\varphi])B^{-1}$, $B = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$

FI: $J([\varphi]) = \begin{pmatrix} \square & x \\ & \square \end{pmatrix}$, $x \in \{0,1\}$ $\Rightarrow$ (b_1, b_2) ist Basis von U, inv. unter φ $[\varphi(ab_1 + cb_2) = BJB^{-1}(ab_1 + cb_2) = BJ(ae_1 + ce_2) =$

$= B((aj_{11} + cj_{12})e_1 + (aj_{21} + cj_{22})e_2) = (aj_{11} + cj_{12})b_1 + (aj_{12} + cj_{22})b_2 \in U]$

FII: $(J([\varphi])) = \begin{pmatrix} \square & & \\ & \square & x \\ & & \square \end{pmatrix}$, $x \in \{0,1\}$. Ebenso $U = \langle b_1, b_2 \rangle$

FIII: $J([\varphi]) = \begin{pmatrix} \square & x & & \\ & \square & y & \\ & & \square & t \\ & & & \square \end{pmatrix}$, $x, y, t \in \{0,1\}$. Ebenso $U = \langle b_1, b_2 \rangle$. $\dashv$

Beh. 2: $U^\perp := \{v \in M \mid \forall u \in U: s(u,v) = 0\}$ ist ebenso φ-inv.

Bew. 2: Sei $v \in U^\perp$. Dann gilt $0 = s(u,v) \overset{\varphi \text{ isom.}}{=} s(\varphi(u), \varphi(v)) \overset{\varphi(u) = u' \in U}{=} s(u', \varphi(v))$

$\underset{u \text{ bel.}}{\overset{\varphi \text{ bij.}}{\Rightarrow}} \varphi(v) \in U^\perp$. $\dashv$

Beh. 3: $U \nsubseteq U^\perp$

Bew. 3: Definiere $V := \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \{v \in M \mid t_v = 0\}$.

Dann gilt, dass $s|_V = \langle \cdot, \cdot \rangle_{St, \mathbb{R}^3}$ und mit

$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V) \geq \dim(U) + \dim(V) - \dim(M) = 1$ folgt $\exists u \in U \setminus \{0\}$: $u \in V$ und damit $s(u,u) > 0$,

da $s(u,u) \overset{u \in V}{=} s|_V(u,u) \overset{u' = \binom{x}{y}}{=} \langle u', u' \rangle_{\mathbb{R}^3} > 0$. $\dashv$

Fall 1: $U \cap U^\perp \neq \{0\}$

Wegen Beh. 1 & 2 ist auch $U \cap U^\perp$ φ-inv. $[v \in U \cap U^\perp \Rightarrow v \in U \wedge v \in U^\perp \overset{1,2}{\Rightarrow} \varphi(v) \in U, \varphi(v) \in U^\perp \Rightarrow \varphi(v) \in U \cap U^\perp]$

und hat wegen Beh. 3 $\dim U \cap U^\perp = 1$, also $U \cap U^\perp = \langle v \rangle$.

Beh.: v ist EV von φ mit $s(v,v) = 0$

Bew.: Da $\varphi(v) \in \langle v \rangle$ folgt $\varphi(v) = \lambda v$, also v ist EV von φ.

Da des weiteren $v \in U^\perp \wedge v \in U$ folgt $s(v,v) = 0$

[Bem.: $U^\perp := \{v \in M \mid \forall w \in U: s(w,v) = 0\}$ und wähle $w = v \in U$] $\dashv$

Fall 2: $U \cap U^\perp = \{0\}$, so $M = U \oplus U^\perp$ [since $\dim U + U^\perp = \dim U + \dim U^\perp + \dim(U \cap U^\perp) \overset{*)}{=} 4$; $U \cap U^\perp = \{0\}$]

$*)$ $\dim U^\perp = 2$, da $U^\perp = \text{Lös}\left(\begin{cases} x b_x + y b_y + z b_z - t b_t = 0 \\ x c_x + y c_y + z c_z - t c_t = 0 \end{cases} \right)$,

diese ist zwei-dim. (mit $\langle b, c \rangle = U$)

Beh. 4: Nach potenzieller Vertauschung können wir annehmen, dass s positiv def. auf U und indefinit auf $U^\perp$ ist.

Bew. 4: $[s]_{St.B.} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ und damit ist die Signatur $\sigma(s) = (3,1)$.

Sei nun $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ Basis von M mit $\langle b_1, b_2 \rangle = U$, $\langle b_3, b_4 \rangle = U^\perp$.

Dann gilt wegen $s(u,v) = 0$ für $u \in U$, $v \in V$, dass $[s]_B = \begin{pmatrix} \square & 0 \\ 0 & \square \end{pmatrix}$ eine Blockdiagonalmatrix ist. Somit ist aber auch $\sigma(s|_{U \times U}) + \sigma(s|_{U^\perp \times U^\perp}) = \sigma(s)$, also ~~da~~ (nach pot. Vertauschung von U und $U^\perp$) $\sigma(s|_{U \times U}) = (2,0)$, $\sigma(s|_{U^\perp \times U^\perp}) = (1,1)$ und damit s pos. def auf U, indef. auf $U^\perp$. $\dashv$

Beh. 5: $\det(\varphi|_U) = \det(\varphi|_{U^\perp}) = \pm 1$

Bew. 5: $\varphi|_U$ ist Isometrie bzgl. $s|_{U \times U}$, ~~somit $\varphi|_{U^\perp}$ bzgl. $s|_{U^\perp \times U^\perp}$~~, da sonst φ keine Isometrie auf $M = U \oplus U^\perp$ wäre.

Somit gilt $\det(\varphi|_U) = \pm 1$; $\det(\varphi|_{U^\perp}) = \pm 1$ und mit $1 = \det(\varphi) = \det(\varphi|_U) \cdot \det(\varphi|_{U^\perp})$ folgt die Beh. $\dashv$

Fall 2.1: $\det(\varphi|_U) = \det(\varphi|_{U^\perp}) = 1$

$s|_{U^\perp \times U^\perp}$ is indef. by Beh. 4. ~~By~~ Mit dem Trägheitssatz von Sylvester bekommen wir die Existenz einer ~~Block~~ Basis B, sodass $[s|_{U^\perp \times U^\perp}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Weil $\varphi|_{U^\perp}$ eine Isometrie ist, finden wir für $A = [\varphi|_{U^\perp}]_B$:

$A^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Wegen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

folgt mittels folgender Rechnung, dass $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $\det(A) = 1 = a^2 - b^2$ ist.

Damit gilt aber für den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$: $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a+b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ is EV von $\varphi|_{U^\perp}$ mit $s\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in$ light cone $\dashv$

Rechnung 2.1: gg.: $\mathrm{I},\ (a+c)(a-c) = 1$

$\mathrm{II},\ (b+d)(b-d) = 1$

$\mathrm{III},\ ab - cd = 0$

$\mathrm{IV},\ ad - bc = 1$

Also aus $\underline{\mathrm{III}}$ und $\underline{\mathrm{IV}}$: $\mathrm{V},\ 1 = 1+0 = ad - bc + ba - cd = a(b+d) - c(b+d) = (a-c)(b+d)$

$\underline{\mathrm{VI}}\quad -1 = -1+0 = bc - ad + ab - cd = b(a+c) - d(a+c) = (a+c)(b-d)$.

Definiere $x = (a+c)$, $x' = (a-c)$, $y = (b+d)$, $y' = (b-d)$.

Dann lassen $\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{V}, \mathrm{VI}$ schreiben als

$\mathrm{I},\ xx' = 1$

$\mathrm{II},\ yy' = 1$

$\mathrm{V},\ x'y = 1$

$\mathrm{VI},\ xy' = -1$

und wir finden $x'(x-y) = 0$ $[\mathrm{I}, \mathrm{V}]$, also $(a-c)(a+c-(b+d)) = 0$.

Da $a-c = 0$ wegen I ausgeschlossen ist, folgt $a+c = b+d$. $\underline{\mathrm{VII}}$

Weiters folgt aus II, VI, dass $y(y'+x') = 0$ und wiederum wegen

$\underline{\mathrm{II}}$: $y = b+d \neq 0 \Rightarrow y' = -x' \Rightarrow b - d = c - a$ $\underline{\mathrm{VIII}}$

Mit $\underline{\mathrm{VIII}} + \underline{\mathrm{VII}}$ erhalten wir $2c = 2b$, also $b = c$ und mit

$\underline{\mathrm{VIII}} - \underline{\mathrm{VII}}$: $2a = 2d \Rightarrow a = d$ und somit die Form $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$.

$\dashv$

Fall 2.2 $\det(\varphi|_{U^\perp}) = \det(\varphi|_U) = -1$

Nach der Charakterisierung der Elemente in $O(2)$ hat $[\varphi_U]$ die Form $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$, ist diagbar und hat EW ± 1. ~~Selbiges gilt für $[\varphi|_{U^\perp}]$.~~

Since $[\varphi|_{U^\perp}] \in Mat_{2\times 2}$, $\det(\varphi|_{U^\perp}) = -1$ it follows from $p_{\varphi_{U^\perp}}(x) = x^2 - Tr(\varphi|_{U^\perp})x + \det(\varphi|_{U^\perp}) = x^2 - Tr(\varphi|_{U^\perp}) - 1$ that $x = + \frac{Tr(\varphi|_{U^\perp})}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{Tr(\varphi|_{U^\perp})}{2}\right)^2 + 1}_{>0}}$,

so $p_{\varphi_{U^\perp}}$ has two real roots and, therefore, splits into linear factors over $\mathbb{R}$ and as a result we find an eigenvector $v \in U^\perp$ with EW λ.

F2.2.1: $s(v,v) = 0$. Dann sind wir fertig (v ist EV von φ & im light cone).

F2.2.2: $0 \neq s(v,v) = s(\varphi(v), \varphi(v)) = s(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 s(v,v) \Rightarrow \lambda_1 = \pm 1$

Wegen $\det(\varphi|_{U^\perp}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, folgt, dass $\lambda_2 = -\frac{1}{\lambda} = \mp 1$ ebenso ein Eigenvektor ist. Nun hat aber φ einen Eigenraum der Größe 2 zum EW 1 und ein zum EV -1. Diese sind ebenso φ-inv. und damit ist entweder $s|Eig_1$ oder $s|Eig_{-1}$ indefinit, also $\exists v$ (oBdA $\in Eig_{-1}$) : $s(v,v) = 0$. Insbesondere ist v ein EV von φ und damit ~~kein~~ EV im light cone. $\dashv$

$\square$