Lineare Algebra II - Übungsnotizen 9

Leopold Karl

8. Mai 2023

1 Überblick: Stoff der letzten Wochen

- Spektralsätze
- Bilinearformen

2 Präsentationen: Serie 22

1. Präsentation A4: Jonas Arndt & Meinolf Lemke
2. Präsentation A5: Annabelle Hafner & Daniel Alexe
3. Präsentation A6: Karim Addi & Katharina Knist

3 Anmerkungen zur Serie 22

- Konkrete Gegenbeispiele anzugeben ist meist einfacher als allgemein zu beweisen, dass eine Aussage nicht gilt, und schließt darüber hinaus alle Zweifel aus.
- Sowohl in Aufgabe 2 (was wenn f = 0), als auch in Aufgabe 5 sowie in Aufgabe 6c) haben einige von euch gewisse Fälle einfach ignoriert. Schaut, dass ihr alle Fälle abdeckt und sorgfältig arbeitet. Festzuhalten, dass eine schon bekannte Beweismethode hier nicht funktioniert ist kein Beweis dafür, dass eine Aussage nicht gilt!

4 Besprechung Quiz 8

a) Falsch: Betrachte die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, sowie die arithmetische(n) und geometrische(n) Vielfachheiten ihrer Eigenwerte.

b) Richtig: Spektralsatz über $\mathbb{R}$

c) Richtig: Sei $A = B^H DB$ für $B \in U_n, D$ diagonal. Dann gilt $A^k = (B^H DB)^k = B^H D^k B$, also ist A^k orthogonal diagonalisierbar.

d) Falsch: Betrachte $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und bemerke, dass dies der Jordanblock zum EW 0 ist, also nicht orthogonal diagonalisierbar, jedoch $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und somit sehr wohl orthogonal diagonalisierbar (sogar egal in welcher orthonormalen Basis).

e) Richtig: Sei $A = B^T DB$ mit $B \in O_n, D$ diagonal. Dann gilt aber schon $B^T = B^H$, da B nur reelle Einträge hat und somit in $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ebenso $A = B^T DB = B^H DB$ mit $B \in U_n, D$ diagonal, also A orthogonal diagonalisierbar.

5 WH Lineare Algebra 1

- Mengenlehre: Gesetze von DeMorgan, Potenzmenge, kartesisches Produkt, Russel'sches Paradoxon
- Abbildungen: Injektivität, Surjektivität, Bijektivität, Lemma: Verhalten unter Verknüpfung, Bsp: charakteristische Fkt., Inklusionabbildung, Projektionen, Bild & Urbild, Partitionen (für Fallunterscheidungen), Iterationen, Hilbert Hotel
- Gruppen :Untergruppen, Homomorphismen, Isomorphismen
- Ringe, Körper (inkl. Charakteristik)
- Polynome: Grad + Verhalten unter Multiplikation & Addition, Division mit Rest in $K[X]$, Fundamentalsatz der Algebra, komplexe Nullstellenpaare in $\mathbb{R}[X]$
- (Unter-)Vektorräume: Bsp: trivialer VR $\{0_V\}$, Standardbsp: $\mathbb{K}^n$, Folgenräume, Funktionenräume, Polynomräume, Matrizenräume
- Span & Linearkombinationen: Lemma Span(S) = Menge aller Linearkombinationen aus Elementen aus S
- Lineare (Un-)abhängigkeit, Basis: Teilmengen linear unabhängiger Mengen sind l.u.; verkleinern einer linear abhängigen Menge S, ohne den Span zu verkleinern; l.u.-Mengen sind kleiner als l.a. Mengen; Existenz einer Basis (eindeutiger Länge) in endlich-dim. VR; im Allgemeinen: Hamel-Basis (Äquivalent zu AC): Existenz einer Basis eines VR beliebiger Dimension; Erzeugendensystem enthält Basis; Def. Dimension eines VR; Kardinatlität einer maximalen l.u. Teilmenge = Kardinalität einer minimalen, erzeugende Teilmenge von V;
- Gauss-Eliminationsverfahren (Lösen von LGS
- (Direkte) Summen von Unterräumen: Dimensionsformel, Def. Komplement
- Lineare Abbildungen: Bsp: Identitätsabb., Ableitung, Integral, Linksmultiplikation mit Matrix, Darstellung von linearen Abbildungen mittels Matrizen (lineare Abbildung ist durch Abbildungsvorschrift von Basiselementen eindeutig bestimmt)

- Kern & Bild: Bezug zu Injektivität/Surjektivität; Def. Endomorphismen, Automorphismen; Inverses (eines Isomorphismus) ist linear (dargestellt durch Inverse Matrix), Rangsatz; Beziehung Dimension zu Injektivität/Surjektivität im Endlichdimensionalen
- Matrizen: Matrixmultiplikation (auf Dimensionen achten) + grundlegende Eigenschaften; Def. Kronecker-Delta; $GL_n(\mathbb{K})$ ist Gruppe; obere/untere Dreiecks-/diagonale Matrizen bilden jeweils eine Gruppe bzgl. Matrixmultiplikation; Def. äquivalente Matrizen; Def. ähnliche Matrizen; Jede Matrix ist äquivalent zu einer Diagonalmatrix
- Koordinatenabbildungen & Darstellungsmatrix: Lemma: Koordinatenabbildungen sind linear und bijektiv ($V \cong K^n$)
- Rang einer Matrix: Isomorphismen lassen Rang unverändert; Spaltenrang und Zeilenrang sind unter Äquivalenz erhalten; Spaltenrang = Zeilenrang
- $Hom(V, W)$: ...ist Vektorraum; Bijektion zwischen linearen Abbildungen und Darstellungsmatrizen (bzgl. gewählten Basen); im Endlichdimensionalen: dim $Hom(V, W) = dimV \cdot dimW$
- LGS: Bemerkung: Lös(A,0) = Ker(A); Lösen durch finden einer speziellen Lösung (Gauß) & Lösen des homogenen LGS; Proposition: Für $A \in Mat_{m \times n}(K)$ gilt: Rang(A) = Rang $(A|b) = n \iff Ax = b$ hat genau eine Lösung; Charakterisierung (20 verschiedene) einer invertierbaren Matrix; Elementarmatrizen und ihre Wirkung als Zeilenoperation (Linksmultiplikation); $GL_n(K)$ ist von Elementarmatrizen erzeugt
- Fasern: Def.; Bsp: $T^{-1}(w) = v + Ker(T)$ für T linear
- Quotientenraum ("Vektorraum gewisser Fasern"): Quotientenraum ist VR; kanonische Quotientenabbildung ist linear mit Ker(pi) = U; Dimension des Quotientenraums: dim V/U = dim V - dim U; Homomorphiesatz; universelle Eigenschaft des Quotientenraums;

Kontakt:
Website: www.leopoldkarl.com
Mail: lekarl@student.ethz.ch
LinkedIn: Leopold Karl