Lineare Algebra II - Übungsnotizen 9

Leopold Karl

8. Mai 2023

1 Überblick: Stoff der letzten Wochen

- Jordannormalform
- Bilinearformen

2 Präsentationen: Serie 23

1. Präsentation A4: Jonas Arndt & Lukas-Magnus Retter
2. Präsentation A5: Federico Rezzonico & Paul Wunderlich
3. Präsentation A6: Tim Fessler & Simeon Petkov

3 Besprechung Quiz 9

Alle Antworten sind richtig, Besprechung in Stunde.

4 Die Jordan-Normalform

- Idee: "Wir können nicht jede Matrix diagonalisieren, aber wie nah können wir an eine Diagonalmatrix drankommen?"
- Rechnen mit Jordanblöcken: $(J_{\lambda,n})^k = (\lambda I_n + J_{0,n})^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\lambda I_n)^i (J_{0,n})^{k-i} \overset{(J_{0,n})^m=0, m\geq n}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} (\lambda I_n)^i (J_{0,n})^{k-i}$
- Minimalpolynom und charakteristisches Polynom aus JNF ablesen: Sei $B = \begin{pmatrix} J_{\lambda,n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda,n_k} \end{pmatrix}$ mit fixiertem λ in JNF. Dann ist $M_B = (X-\lambda)^{max(n_1,\ldots,n_k)}$ und $p_B = (\lambda - X)^{n_1+\ldots+n_k}$

- Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert λ: Sei $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ trigonalisierbar. Dann existiert, wie in der Vorlesung bewiesen eine (Jordan-)Basis B, sodass $A = BJ_AB^{-1}$ für eine eindeutige JNF J_A. Wir wissen, dass $dim\ Ker\ J_A - \lambda I_n =$ Anzahl der Jordanblöcke zum EW λ, da ja $J_A - \lambda I_n$ in Blockdiagonalgestalt ist und all jene Blöcke zum EW λ, nachdem λ auf der Diagonale abgezogen wurde, einen eindimensionalen Kern haben (und alle anderen trivialen Kern). Mit $dimKer(J_A - \lambda I_n) = dimKer(B(J_A - \lambda I_n)B^{-1}) = dimKer(A - \lambda I_n)$ folgt nun $dimKer(A - \lambda I_n) =$ Anzahl Jordanblöcke zum EW λ.

- Anzahl der Blöcke zum Eigenwert λ der Größe k: $B(\lambda, k, T) = 2\cdot dimKer(T-\lambda I_n)^k - dimKer(T-\lambda I_n)^{k+1} - dimKer(T-\lambda I_n)^{k-1}$

5 Diverse Beispiele zur Jordannormalform

Siehe WhatsApp-Gruppe.

Kontakt:
Website: www.leopoldkarl.com
Mail: lekarl@student.ethz.ch
LinkedIn: Leopold Karl