Lineare Algebra II - Übungsnotizen 7

Leopold Karl

3. April 2023

1 Überblick: Stoff der letzten Wochen

- Satz von Cayley-Hamilton
- Euklidische und unitäre Vektorräume

2 Präsentationen: Serie 18

1. Präsentation A4: Laura Priglinger & Milko Bakalov
2. Präsentation A5: Gioacchino Greber & Katharina Knist
3. Präsentation A6: Adrian Corel & Tim Fessler

3 Anmerkungen zur Serie 18

- ad A2:

  Betrachte das Polynom $q(X) = p_A(X) \cdot X^{-e_0+1}$ für e_0 die Vielfachheit des Linearfaktors X in der Linearfaktorzerlegung von $p_A(X)$ über $\mathbb{C}$.

- ad A5:

  Beweise lineare Abhängigkeit nicht nur für die Menge $\{I_n, A, ..., A^n\}$, sondern für eine beliebige Menge $\{A^{i_1}, A^{i_2}, ..., A^{i_n}\}$ mit $i_1 < i_2 < ... < i_n$.

4 Besprechung Quiz 6

Bemerke, dass die Eigenwerte von A gerade $0, 1, -2$ sind. Damit sind aber die Eigenwerte von A^2: $0^2 = 0, 1^2 = 1, (-2)^2 = 4$ und somit das charakteristische Polynom $p_{A^2}(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda$

5 Das Minimalpolynom & Der Satz von Cayley Hamilton

Ein paar Definitionen und Sätze (WH aus Vorlesung):

- Def. - Lemma (Minimalpolynom): Sei T ein Endomorphismus auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum über dem Körper K. Dann existiert ein eindeutiges Polynom M_T, das

  1. normiert ist
  2. (a) von minimalem deg($\cdot$) mit $M_T(A) = 0$ ist,
     oder äquivalent dazu:
     (b) $\forall p \in I_T := \{q \in \mathbb{P}_n(K) : q(T) = 0\} : M_T|p$ erfüllt
     oder für das, ebenso äquivalent dazu,
     (c) $I_T = \{g \cdot M_T | g \in K[x]\}$ gilt.

  Beweis. Polynomdivision (mit Rest); ausführlicher in Stunde. □

- Falscher Beweis von Cayley-Hamilton: $p_A(X) = det(A - X \cdot I_n) \implies p_A(A) = det(A - A \cdot I_n) = det(0) = 0$. Worin besteht der Fehler?

- Lemma (Eigenwerte von "Polynom-Endomorphismen"): Sei $p \in \mathbb{P}_n(K)$, T ein Endomorphismus auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum über dem Körper K. Dann gilt: Ist v ein Eigenvektor von T zum Eigenwert λ, so ist $p(v)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $p(\lambda)$ von $p(T)$.

  Beweis. $p(T)v = a_n T^n v + ... + a_1 T v + a_0 v = a_n \lambda^n v + ... + a_1 \lambda v + a_0 v = p(\lambda) v$ □

- Cayley-Hamilton: Für das charakteristische Polynom $p_T(\lambda)$ eines Endomorphismus T auf dem endlichdimesionalen Vektorraum V gilt: $p_T(T) = 0$

  Beweis. Hier nur für diagonalisierbare Endomorphismen (aus Fischer), mehr oder weniger direkt mit vorigem Lemma:
  Sei A = [T] in einer beliebigen Basis. Da T diagonalisierbar ist, finden wir B aus Eigenvektoren mit $A = B^{-1}DB$, D diagonal mit EW als Diagonaleinträge. Somit gilt:
  $p_A(A) = B^{-1}p(D)B = B^{-1}0_{n\times n}B = 0$. □

6 Euklidische & unitäre Vektorräume

- Diagram verschiedene Räume: top. Raum, metrischer Raum, normierter Raum, Skalarproduktraum (vollständige Räume, Banachräume)
- Def. Skalarprodukt, Norm, Metrik
- Def. Orthogonalsystem, Orthonormalsystem
- Skalarprodukt definiert Norm (Cauchy-Schwarz für Dreiecksungleichung)
- Norm definiert Metrik
- Bemerkung: Metrik definiert Topologie

- Skalarprodukt durch positiv definite matrix ist Skalarprodukt
- Für beliebige Matrix $A \in GL_n\mathbb{C}$ ist $A^T A$ positiv definit & symmetrisch
- Gram-Schmidt & insbesondere die Projektionsabbildung

7 Ein paar Aufgaben

1. Zeige, dass drei der Bedingungen in der Definition eines Skalarprodukts ausreichen (die vierte implizieren). Um welche handelt es sich?
2. Zeige, dass $A \in Mat_{2\times 2}$, A symmetrisch, positiv definit ist $\iff a_{11} > 0 \wedge det(A) > 0$.
3. Zeige, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Frob} : Mat_{n\times n}(\mathbb{C}) \times Mat_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} := Spur(A^T \overline{B})$ ein Skalarprodukt ist.

Kontakt:
Website: www.leopoldkarl.com
Mail: lekarl@student.ethz.ch
LinkedIn: Leopold Karl