Lineare Algebra II - Übungsnotizen 6

Leopold Karl

27. März 2023

1 Überblick: Stoff der letzten Wochen

- Minimalpolynom
- Satz von Cayley-Hamilton
- Euklidische und unitäre Vektorräume

2 Präsentationen: Serie 17

1. Präsentation A4: Jonas Arndt & Kaito Fuss
2. Präsentation A5: Paul Wunderlich & Riccarardo Celori
3. Präsentation A6: Adrian Corel & Yossif Marinov

3 Anmerkungen zur Serie 17

- ad A1: Der Eigenraum ZU EINEM EIGENWERT $Eig_T(\lambda)$ hängt stets von einem Eigenwert ab. Insbesondere spricht man nicht von dem Eigenraum eines Vektorraums, den einige von euch gerne als $Eig_B := \bigcup_i Eig_T(\lambda_i)$ definiert hätten.
- ad A4: i) Siehe S6 A5
  ii) Beweisen wir folgende allgemeinere Behauptung: Sei U eine linear unabhängige Menge von Vektoren in einem beliebig-dimensionalen Vektorraum V über dem Körper K. Dann lässt sich U zu einer Basis erweitern. Bemerkung: Wir definieren eine Basis hier als V erzeugende, linear unabhängige Teilmenge von V.

  Beweis. Sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge linear unabhängiger Vektoren in V. Sei $W = \langle U \rangle$. Da W ein Untervektorraum von V ist, ist der Quotientenvektorraum $V \setminus U$ wohldefiniert. Da $\subseteq$ auf den linear unabhängigen Teilmengen von V/U ein Halbordnung (Reflexivität, Antisymmtrie, Transitivität) definiert und jede $\subseteq$-Kette durch V/U begrenzt ist, finden wir mit dem Lemma von Zorn (äquivalent zum Axiom of Choice, verweis auf Grundstrukturen) eine maximale linear unabhängige Teilmenge $Z \subseteq V/U$. Somit ist $Z' := \{v | v + U \in Z\} \cup U$ immer noch linear unabhängig und erzeugt ganz V, da wir sonst einen Widerspruch zur Maximalität von Z erhalten würden. $\square$

- ad A6: Aufgepasst: Wir wollen die diversen Summanden, die bei der Definition von den Koeffizienten c_k vorkommen, nicht mehrfach zählen! Ordne also die Indizes.

4 Besprechung Quiz 5

1. (a) Wahr, da, weil die Eigenwerte paarweise verschieden sind, gilt, dass: $\forall\lambda : m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1$ (paarweise verschieden $\implies m_a(\lambda_i) \leq 1$; λ_i Eigenwert $\implies m_g(\lambda_i) \geq 1$). Damit und aufgrund der Tatsache, dass Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten linear unabhängig sind, finden wir eine Basis aus Eigenvektoren, was nach der Charakterisierung der Diagonalisierbarkeit äquivalent zur Diagonalisierbarkeit von A ist.
   Wären die Eigenwerte nicht paarweise verschieden, so gilt die Aussage hingegen nicht. Betrachte dazu $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und bemerke, dass $Eig_A(1) = \langle e_1 \rangle$, wir aber zwei Eigenvektoren zum Eigenwert 1 benötigen würden, um eine Basis aus Eigenvektoren zu "bauen"(hier ist $dim\ V > \sum_i dimEig_A(\lambda_i)$.

   (b) Wahr, haben wir schon in (a) gezeigt

   (c) Falsch, wir haben in (a) gezeigt, dass $\forall\lambda : m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1$

2. (a) Falsch: Sei $K = \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, P = I_2, B = I_2, Q = A$. Dann gilt mit direkter Rechnung: $char_A(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda) \neq (1 - \lambda)^2 = char_B(\lambda)$.

   (b) Falsch: Verwende dasselbe Gegenbeispiel wie in (a) und bemerke, dass $Spur(A) = 3 \neq 2 = Spur(B)$

   (c) Wahr. Beweis in mehreren Variationen:

      i. Die direkte Variante: Sei $A = PBQ$ mit $A, B \in Mat_{n\times n}(K), P, Q \in GL_n(K)$. Sei nun auch $A \in GL_n(K)$. Dann ist $B = P^{-1}AQ^{-1}$ und somit als Produkt von invertierbaren Matrizen selbst invertierbar (mit Inversem $QA^{-1}P$).

      ii. Beweis mit der Determinante: Sei $A = PBQ$ mit $A, B \in Mat_{n\times n}(K), P, Q \in GL_n(K)$. Sei nun auch $A \in GL_n(K)$. Dann gilt für $C \in \{A, P, Q\} : det(C) \neq 0$. Somit ist aber auch $det(B) = det(P^{-1}AQ^{-1}) = det(P^{-1}) \cdot det(A) \cdot det(Q^{-1} \neq 0$, da keiner der Faktoren gleich null war ($det(C^{-1}) = \frac{1}{det(C)}$). Als Folge erhalten wir $B \in GL_n(K)$.

      iii. Beweis mit Eigenwerten/Kern: Da $Ker(C) = \{0\}$ für $C \in \{A, P^{-1}, Q^{-1}\}$, folgt sofort $ker(B) = ker(P^{-1}AQ^{-1}) = \{0\}$

3. (a) Falsch. Betrachte $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1 = i, \lambda_2 = 1 \neq -i = \bar{i}$

(b) Wahr. Wie letzte Stunde schon besprochen, ist *lambda* $\in \mathbb{C}$ eine Nullstelle eines reellwertigen Polynoms gdw. $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle des Polynoms ist.

(c) Falsch. Betrachte dasselbe Gegenbeispiel wie in (a): $Eig_A(\bar{i}) = Eig_A(-i) = \{0\} \neq \overline{Eig_A(i)} = \overline{\langle e_1 \rangle} = \langle e_1 \rangle$

5 WH Diagonalisierbarkeit

In der Vorlesung habt ihr gesehen, dass eine Matrix A diagonalisierbar ist g.d.w.:

- eine Basis von V aus Eigenvektoren von A existiert;
- das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt und für alle Eigenwerte die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit ist;
- die Summe der Dimensionen der Eigenräume gleich der Dimension des Vektorraums ist;
- der Vektorraum als direkte Summe der Eigenräume geschrieben werden kann.

Fragen zur Diagonalisierbarkeit:

1. Wann ist ein Jordanblock diagonalisierbar?
2. Berechne $J_{2,n}^j$ für alle $n, j \in \mathbb{N}$.

6 Das Minimalpolynom & Der Satz von Cayley Hamilton

Ein paar Definitionen und Sätze (WH aus Vorlesung):

- Def. - Lemma (Minimalpolynom): Sei T ein Endomorphismus auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum über dem Körper K. Dann existiert ein eindeutiges Polynom M_T, das
  (i) normiert ist
  (ii) $\forall p \in I_T := \{q \in \mathbb{P}_n(K) : q(T) = 0\} : M_T | p$ erfüllt oder äquivalent dazu: $I_T = \{g \cdot M_T | g \in K[x]\}$

  Beweis. Polynomdivision (mit Rest); ausführlicher in Stunde. □

- Lemma (Eigenwerte von "Polynom-Endomorphismen"): Sei $p \in \mathbb{P}_n(K)$, T ein Endomorphismus auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum über dem Körper K. Dann gilt: Ist v ein Eigenvektor von T zum Eigenwert λ, so ist $p(v)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $p(\lambda)$ von $p(T)$.

  Beweis. $p(T)v = a_n T^n v + ... + a_1 T v + a_0 v = a_n \lambda^n v + ... + a_1 \lambda v + a_0 v = p(\lambda) v$ □

- Cayley-Hamilton: Für das charakteristische Polynom $p_T(\lambda)$ eines Endomorphismus T auf dem endlichdimesionalen Vektorraum V gilt: $p_T(T) = 0$

  Beweis. Hier nur für diagonalisierbare Endomorphismen (aus Fischer), mehr oder weniger direkt mit vorigem Lemma:
  Sei A = [T] in einer beliebigen Basis. Da T diagonalisierbar ist, finden wir B aus Eigenvektoren mit $A = B^{-1} D B$, D diagonal mit EW als Diagonaleinträge. Somit gilt:
  $p_A(A) = B^{-1} p(D) B = B^{-1} 0_{n \times n} B = 0.$ □

---

7 Ein paar Aufgaben

1. Eine (schwierigere) Aufgabe:
   Beweise oder widerlege: Es existiert eine reelle $n \times n$-Matrix, die die Gleichung $A^2 + 2A + 5I_n = 0$ erfüllt g.d.w. $n \in \mathbb{N}_g$.

2. Was ist das Minimalpolynom einer blockdiagonalen Matrix mit der Eigenschaft, dass alle Blockmatrizen (auf der Diagonalen) Jordan-Blöcke sind?

3. Zeige, dass drei der Bedingungen in der Definition eines Skalarprodukts ausreichen (die vierte implizieren). Um welche handelt es sich?

4. Zeige, dass $A \in Mat_{2\times 2}$, A symmetrisch, positiv definit ist $\iff a_{11} > 0 \wedge det(A) > 0$.

5. Zeige, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Frob} : Mat_{n\times n}(\mathbb{C}) \times Mat_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} := Spur(A^T\overline{B})$ ein Skalarprodukt ist.

Kontakt:
Website: www.leopoldkarl.com
Mail: lekarl@student.ethz.ch
LinkedIn: Leopold Karl