Lineare Algebra II - Übungsnotizen 5

Leopold Karl

20. März 2022

1 Überblick: Stoff der letzten Wochen

- Eigenvektoren & Eigenwerte
- charakteristisches & Minimalpolynom
- Jordan-Normalform

2 Richtigstellung

Vergangene Stunde habe ich mich am Ende beim Beweis des folgenden Lemmas verfangen und möchte dies der Vollständigkeit halber nun noch korrekt nachholen.

Lemma: Sei $A \in Mat_{n\times n}(K)$. Dann ist A diagonalisierbar $\iff$ eine Basis des K^n aus Eigenvektoren von A existiert.

Beweis. Sei A diagonalisierbar. Dann existiert per Definition der Diagonalisierbarkeit eine Matrix $B \in GL_n(K) : B^{-1}AB = D$ für eine Diagonalmatrix $D \in Mat_{n\times n}(K)$. Sei $B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \dots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} - & b'_1 & - \\ & \vdots & \\ - & b'_n & - \end{pmatrix}$. Dann gilt aber für einen beliebigen der Basisvektoren b_j, das $A \cdot b_j = BDB^{-1} \cdot b_j = BDe_j = Bd_{jj}e_j = d_{jj}b_j$ für $D = (d_{ij})_{i,j}$ aufgrund der Kronecker-Eigenschaft bei der Multiplikation von $B^{-1} \cdot b_j$. Also ist b_j ein Eigenvektor zum Eigenwert d_{jj} und wir haben also eine Basis aus Eigenvektoren gefunden.

Sei hingegen $\mathcal{B} = (b_i)_i$ eine Basis von K^n aus Eigenvektoren von A. Dann gilt einerseits, dass $B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \dots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix} \in GL_n(K)$, da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, und andererseits gibt es ein (eindeutiges) $\lambda_j \in K : A \cdot b_j = \lambda_j \cdot b_j$, da b_j Eigenvektor von A ist. Somit gilt aber: $B^{-1}AB \cdot e_j = B^{-1}Ab_j = B^{-1}\lambda_j b_j =$

$\lambda_j B^{-1} b_j = \lambda_j e_j$ und somit $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 e_1 & \dots & \lambda_n e_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

□

3 Präsentationen: Serie 16

1. Präsentation A4: Federico Rezzonico & Luca Binder
2. Präsentation A5: Carlo Crespi
3. Präsentation A6: Karim Addi & Laura Priglinger

4 Anmerkungen zur Serie 16

- ad A1: Das charakteristische Polynom wird meist als normiert definiert. Nachdem ich es im Skript nachgeschlagen habe, ist mir aufgefallen, dass das bei euch nicht der Fall war - entschuldigung für die Anmerkungen diesbezüglich in der Korrektur der Serie.
- ad A1: Es gilt grundsätzlich: Sei $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$, also in Worten: Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts ist stets kleiner gleich der algebraischen Vielfachheit.

  Beweis. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper K, sei $T : V \to V$ ein Endomorphismus von V und $\lambda \in K$ ein Skalar. Falls λ kein Eigenwert ist, so ist $m_g(\lambda) = m_a(\lambda) = 0$. Ist hingegen λ ein Eigenwert, so gilt $m_g(\lambda) := dim(Eig_T(\lambda)) \leq 1$ und wir finden also eine Basis $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^{m_g(\lambda)}$ von $Eig_T(\lambda)$, die wir auf eine Basis von V erweitern können: Sei $\mathcal{B}' = (b_i)_{i=1}^n$ eine solche erweiterte Basis. Nun gilt aber für die Matrix $B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \dots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix}$, dass für alle $j \in \{1, \dots, m_g(\lambda)\}$ gilt: $B^{-1}ABe_j = B^{-1}Ab_j = B^{-1}\lambda b_j = \lambda B^{-1} b_j = \lambda e_j$. Also hat $B^{-1}AB$ die Form $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda (= d_{jj}) & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$, wobei $*$ für beliebige Eintrage steht.
  Somit existiert aber ein Polynom $q \in \mathbb{P}_{n-j} : p_A(X) = p_{B^{-1}AB}(X) = (X - \lambda)^j \cdot q(X)$ aufgrund des Erhalts des charakteristischen Polynoms unter Ähnlichkeit.

  □

- ad A4b): Konvergenz von $(x_n)_n$ gegen 0 bedeutet nicht, dass $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x_n = 0$!
- ad A4d): Gibt es auch endlich-dimensionale Endomorphismen ohne Eigenwerte?
  Antwort. Ja! Betrachte z.B. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, A = \begin{pmatrix} cos(x) & -sin(x) \\ sin(x) & cos(x) \end{pmatrix}$ für $x \neq \pi \cdot k$ $(k \in \mathbb{N})$. Dann gilt $p_A(\lambda) = (cos(x) - \lambda)^2 + sin(x)^2 = \lambda^2 - 2cos(x)\lambda + 1$, also nach der Mitternachtsformel $\lambda = cos(x) \pm \sqrt{cos(x)^2 - 1}$. Da aber die Diskriminate $cos(x)^2 - 1 < 0$ existiert für die gegebene Wahl von x keine reelle Nullstelle, also auch kein Eigenwert.
- Zusatzaufgabe: Stelle eine Vermutung über die minimal und maximal mögliche Anzahl an Eigenwerten eines Endomorphismus des $\mathbb{R}^n$ auf und beweise diese. Wie sieht dies für $K = \mathbb{Q}$ aus? (schwierige Aufgabe; Tipps in Fußnote)[1]
- ad A5: Demnächst werden nilpotente Abbildungen/Matrizen für die Jordannormalform wichtig werden (Bsp: Jordanblock).
- ad A6b): Wo verwenden wir die Endlichdimensionalität?

5 WH Diagonalisierbarkeit

In der Vorlesung habt ihr gesehen, dass eine Matrix A diagonalisierbar ist g.d.w.:

- eine Basis von V aus Eigenvektoren von A existiert;
- das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt und für alle Eigenwerte die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit ist;
- die Summe der Dimensionen der Eigenräume gleich der Dimension des Vektorraums ist;
- der Vektorraum als direkte Summe der Eigenräume geschrieben werden kann.

Fragen zur Diagonalisierbarkeit:

1. Wann ist ein Jordanblock diagonalisierbar?
2. Berechne $J_{2,n}^j$ für alle $n, j \in \mathbb{N}$.

6 Ausblick: Minimalpolynom

Ein paar Definitionen und Sätze (WH aus Vorlesung):

- Def. - Lemma (Minimalpolynom): Sei T ein Endomorphismus auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum über dem Körper K. Dann existiert ein eindeutiges Polynom M_T, das
  (i) normiert ist
  (ii) $\forall p \in I_T := \{q \in \mathbb{P}_n(K) : q(T) = 0\} : M_T | p$ erfüllt oder äquivalent dazu: $I_T = \{g \cdot M_T | g \in K[x]\}$

[1]Tipps:
1) Lies den Satz über rationale Nullstellen nach: https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_ber_rationale_Nullstellen.
2) Betrachte das Polynom $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2$. Hat dies rationale Nullstellen?
3) Kannst du eine Matrix mit Einträgen in $\mathbb{Q}$ finden, die dies als charakteristisches Polynom hat?
4) Kann man diese Idee auf beliebiges $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinern?

Beweis. Polynomdivision (mit Rest); ausführlicher in Stunde. □

- Lemma (Eigenwerte von "Polynom-Endomorphismen"): Sei $p \in \mathbb{P}_n(K)$, T ein Endomorphismus auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum über dem Körper K. Dann gilt: Ist v ein Eigenvektor von T zum Eigenwert λ, so ist $p(v)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $p(\lambda)$ von $p(T)$.

  Beweis. $p(T)v = a_n T^n v + ... + a_1 T v + a_0 v = a_n \lambda^n v + ... + a_1 \lambda v + a_0 v = p(\lambda) v$ □

- Cayley-Hamilton: Für das charakteristische Polynom $p_T(\lambda)$ eines Endomorphismus T auf dem endlichdimesionalen Vektorraum V gilt: $p_T(T) = 0$

  Beweis. Hier nur für diagonalisierbare Endomorphismen (aus Fischer), mehr oder weniger direkt mit vorigem Lemma:
  Sei A = [T] in einer beliebigen Basis. Da T diagonalisierbar ist, finden wir B aus Eigenvektoren mit $A = B^{-1}DB$, D diagonal mit EW als Diagonaleinträge. Somit gilt:
  $p_A(A) = B^{-1}p(D)B = B^{-1}0_{n\times n}B = 0$. □

Eine (schwierigere) Aufgabe:
Beweise oder widerlege: Es existiert eine reelle $n \times n$-Matrix, die die Gleichung $A^2 + 2A + 5I_n = 0$ erfüllt g.d.w. $n \in \mathbb{N}_g$.

Kontakt:
Website: www.leopoldkarl.com
Mail: lekarl@student.ethz.ch
LinkedIn: Leopold Karl