Lineare Algebra - Übungsnotizen 11

Leopold Karl

5. Dezember 2022

1 Überblick: Stoff der letzten Wochen

- Raum der linearen Abbildungen
- Elementarmatrizen
- Zeilenrang = Spaltenrang

2 Serie 5

1. Präsentation: Samuel Noger
   Hinweis: Führe einen Induktionsbeweis durch!
2. Präsentation: Lino Biella
   Hinweis: Wir wissen schon, dass die Ableitung linear ist...
3. Präsentation: Lukas-Magnus Retter
   Hinweis: Indizesspielerei
4. Präsentation: Aleksandar Tuzlak
   Hinweis: Finde ein allgemeines Gegenbeispiel (eines, dass sich für beliebige Vektorräume V, W konstruieren lässt.
5. Präsentation: Katharina Knist & Tim Fessler
   Hinweis: Wie in der vorherigen Übungsstunde: Herumspielen mit Basiswechsel- und Darstellungsmatrizen
6. Aleksandar Tuzlak
   Hinweis: Wie viele Dimensionen hat K als VR über K?

Kontakt:
Website: www.leopoldkarl.com
Mail: lekarl@student.ethz.ch
LinkedIn: Leopold Karl

3 Beispiele/Übungen

a) Seien V, W Vektorräume über K und $T \in \text{Abb}(V, W)$ beliebig. Wann ist T eine lineare Abbildung? Zeigen Sie, dass $\text{Hom(V, W)} \neq \emptyset$.

c) Sei nun $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ die Abbildung definiert durch $T(M) = MA$ für alle $M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, wobei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass T eine lineare Abbildung ist.

d) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[T]_{\mathcal{B}}$ von T für die geordnete Basis

$$\mathcal{B} = \left(E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Bestimme den Rang von:

$$A_n := \begin{pmatrix} 1 & 5 & \dots & 5 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 5 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 2 mit reellen Koeffizienten.

b) Sei $T : V \to V$ die Abbildung $p(x) \mapsto x \cdot p'(x)$. Zeigen Sie, dass T eine wohldefinierte (d.h. $T(p) \in V$ für alle $p \in V$) lineare Abbildung ist.

c) Ist T invertierbar?

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Finde eine Basis vom Bild von A. Was ist der Rang von A?

Kontakt:
Website: www.leopoldkarl.com
Mail: lekarl@student.ethz.ch
LinkedIn: Leopold Karl