Lineare Algebra - Übungsnotizen 7

Leopold Karl

07. November 2022

1 Überblick: Stoff der letzten Wochen

- Dimension eines Vektorraums
- Basis eines Vektorraums

2 Serie 5

1. Präsentation: Katharina Knist & Milko Bakalov
   Hinweis: Man kann hier Gausselimination verwenden!
2. Präsentation: Leopold Reigl & Ramon Willi
   Hinweis: Was sind genau die Skalarfaktoren, mit denen man multiplizieren darf?
3. Präsentation: Anja Leimer & Carlo Crespi
   Hinweis: Wie schauen die Elemente des VR genau aus?
4. Präsentation: Marius Tgetgel & Tim Fessler
   Hinweis: UVR Bedingungen checken; Basis äufbauen": immer einen weiteren (linear unabhängigen) Basisvektor hinzunehmen bis es nicht mehr geht. Faustregel: Pro Einschränkung eine Dimension weniger
5. Präsentation: Karim Addi & Lars Bänziger
   Hinweis: Basiserweiterungssatz
6. Lukas-Magnus Retter & Maxence Aleksa
   Hinweis: Nicht nur paarweise lineare Unabhängigkeit zeigen!

Kontakt:
Website: www.leopoldkarl.com
Mail: lekarl@student.ethz.ch
LinkedIn: Leopold Karl

3 Beispiele/Übungen

1. Sei V ein Vektorraum. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?
   (a) Für jedes Erzeugendensystem S von V gilt $\dim_K(V) \leqslant |S|$.
   (b) Für jede linear unabhängige Teilmenge S von V gilt $|S| \leqslant \dim_K(V)$.
   (c) Es gilt $\dim_K(V) = |V|$.
   (d) Für jede Teilmenge $S \subset V$ gilt $\dim_K(\langle S \rangle) \leqslant \dim_K(V)$.

2. Welche Aussage gilt für alle Unterräume U und V der Dimension 2 von $\mathbb{R}^3$?
   (a) $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 1$
   (b) $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 2$
   (c) $1 \leqslant \dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) \leqslant 2$
   (d) $\dim_{\mathbb{R}}(U + V) = 3$

3. Was ist die Dimension des VR der $m \times n$ Matrizen $M_{m \times n}$ über einem beliebigen Körper K? Finde eine Basis!

4. Was ist die Dimesion von $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Finde eine Basis!

4 Zusätzliche Multiple Choice

1. Seien V ein Vektorraum und S ein Erzeugendensystem von V. Dann gilt immer:
   (a) Jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Vektoren aus S.
   (b) Jedes $v \in V$ ist eine eindeutige Linearkombination von Vektoren aus S.
   (c) S ist ein Unterraum von V.
   (d) $S = V$

2. Sei V ein Vektorraum der Dimension 2 über K, und sei $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von V. Für welche Werte von $\lambda \in K$ ist auch $\{v_1, v_1 + \lambda \cdot v_2\}$ eine Basis von V?
   (a) Für alle $\lambda \in K$.
   (b) Die Antwort hängt von den gewählten Vektoren v_1, v_2 ab.
   (c) Nur für $\lambda = 0$.
   (d) Für alle von 0 verschiedenen $\lambda \in K$.

3. Sei V ein Vektorraum und $v_1, v_2 \in V$ zwei linear unabhängige Vektoren. Sei $v_3 \in V$ ein dritter Vektor. Welche Aussage ist im Allgemeinen wahr?
   (a) Falls v_1, v_3 linear unabhängig sind und v_2, v_3 linear unabhängig sind, so sind auch v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.
   (b) Falls v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, so sind auch v_1, v_3 linear unabhängig.
   (c) Falls $v_3 \neq 0$ ist, dann sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.
   (d) Keine der oberen.

4. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$?
   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$
   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

5. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?
   (a) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
   (b) Der Nullvektor ist nie Teil einer Basis.
   (c) Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.
   (d) Jeder Vektorraum besitzt mindestens zwei verschiedene Basen.

Kontakt:
Website: www.leopoldkarl.com
Mail: lekarl@student.ethz.ch
LinkedIn: Leopold Karl