

Lineare Algebra - Übungsnotizen 4

Leopold Karl

17. Oktober 2022

1 Überblick: Stoff der letzten Wochen

- Vektorräume
- Untervektorräume
- Körper
- Lineare Gleichungssysteme

2 Quiz 2

Angabe: Let $f : X \rightarrow Y$ and $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$ be functions.

1. Stimmt es, dass $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ impliziert, dass $g_1 = g_2$?
Nein, betrachte $X = Y = Z = \mathbb{R}$, $f : x \mapsto 1$, $g_1 : x \mapsto x^2$, $g_2 : x \mapsto x$ als Gegenbeispiel.
2. Trifft es zu, dass $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ für eine beliebige Teilmenge $B \subseteq Y$?
Ja, das habt ihr in Serie 2, Aufgabe 6 gezeigt.
3. Nehmen wir an, dass $g_1 \circ f$ injektiv ist. Bedeutet dies, dass g_1 injektiv ist?
Nein, betrachte $X = \mathbb{R}^+$, $Y = Z = \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $g_1 : x \mapsto x^2$

3 Serie 3

1. Präsentation: Anja Leimer & Karim Addi
Hinweis: Wie viele freie Variablen haben wir? Allgemein gilt: Anzahl Variablen - Anzahl Pivots = Anzahl freie Variablen.
 2. Präsentation: Daniel Alexe & Kevin Santrau
Hinweis: $\frac{3}{4} := \bar{3} \cdot \bar{4}^{-1}$. Außerdem: Gib stets eine Lösungsmenge an!
 3. Präsentation: Leopold Reigl & Tamara Altmann
Hinweis: Binomische Formel: $\forall n \in \mathbb{N} : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$.
 4. Präsentation: Lukas-Magnus Retter & Mario Zingg
Hinweis: ähnlich zu 1.
 5. Präsentation: Federico Rezzonico & Milko Bakalov
Hinweis: Körperaxiome konsequent durchgehen.
 6. Präsentation: Maxence Aleksa & Meinolf Lemke
Hinweis: Bemerke, dass wir durch die Bijektionen m_b die für $b \in k$ beliebig die Gleichung $S = b \cdot S$ erhalten.
-

4 Beispiele/Übungen

1. Löse das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Stimmen die folgenden Aussagen?
 - (a) Jeder Vektorraum hat zwei Untervektorräume.
 - (b) Jeder Körper hat zwei verschiedene Elemente.
 - (c) Jeder Vektorraum hat zwei verschiedene Elemente.
3. Ist $\mathbb{C} = \{x \in \mathbb{R}^2\}$ mit der komponentenweisen Addition und der Skalaren Multiplikation mit beliebigen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ ein Vektorraum?
4. Ist $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1\}$ ein Untervektorraum von \mathbb{C} ? Hierbei bezeichnet x_1 die erste Komponente von x .
5. Wie sieht es mit $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\}$ aus?

5 Adding to the lecture

- Der Polynomring über einem Körper k : $k[X]$
...ist die Menge aller Polynome gemeinsam mit der Addition aus dem Körper für die Faktoren vor den Variablen (Seien $p = aX^2 + bX, q = cX + d \in k[X]$. Dann gilt: $p + q = aX^2 + (b+c)X + d$), sowie der Skalarmultiplikation (Sei $a \in k, p = bX^2 + cX + d \in k[X]$: $a \cdot p = abX^2 + acX + ad$).
- Die linearen Unterräume von \mathbb{R} und \mathbb{R} über \mathbb{R} sind einerseits $\{0\}$ und \mathbb{R} selbst, da sobald man einen Vektor $v \neq 0$ im Vektorraum \mathbb{R} ausgewählt hat durch Skalarmultiplikation (mit beliebigen Elementen aus \mathbb{R}) schon den gesamten Raum aufspannt, und andererseits $\{(0,0)\}$ sowie alle Geraden, die im in der Schule oft behandelten Koordinatensystem (mit \mathbb{R} jeweils auf x- und y-Achse aufgetragen), durch den Ursprung verlaufen. Genauere Erläuterungen dazu in der Übungsstunde.

6 Eine Bemerkung zu „oBdA“, „äquivalent“ und „analog“

Obige Wörter wurden von euch in den vergangenen Wochen gerne als Abkürzung bzw. Umgehung von weiterer Argumentation verwendet. DAZU SIND SIE ABER NUR IN BESTIMMTEN FÄLLEN GEDACHT:

1. „oBdA“ (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) wird verwendet, wenn eine Wahl getroffen wird, um den folgenden Beweis anschaulicher notieren zu können. Hierbei ist jedoch wichtig, dass eine andere Wahl exakt denselben Argumentationsweg verfolgen würde mit dem einzigen Unterschied, dass man die Buchstaben vertauschen würde. Ein Beispiel wäre der Beweis vom Zwischenwertsatz (in Folge wird nicht auf den allgemeinen Zwischenwertsatz, sondern zu Anschauungszwecken eine schwächere Form verwendet):
Wir wollen zeigen, dass jede auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion mit $f(a) \cdot f(b)$ mindestens eine Nullstelle hat. Dazu bemerken wir, dass also einer der Funktionswerte positiv, der andere negativ sein muss. Da die Wahl, welcher der beiden positiv ist und welcher negativ ist wirklich egal für den folgenden Beweis sein wird (in dem Sinne, dass wir beim Treffen der jeweils anderen Wahl die Buchstaben einfach nur vertauschen müssen), schreiben wir nun „oBdA sei $f(a) > 0, f(b) < 0$ “. Daraufhin führen wir den Beweis mit der von uns getroffenen Wahl und achten beim Korrekturlesen darauf, ob wir den Fall $f(b) > 0, f(a) < 0$ tatsächlich durch simples Vertauschen der Buchstaben a,b in unserem Beweis abdecken.

2. Das Wort „äquivalent“ wird verwendet, um eine logische Äquivalenz \iff zum Ausdruck zu bringen. Nicht aber als Synonym von „analog“.
3. Das Wort „analog“ wird tatsächlich benutzt, um Beweise abzukürzen, da es dem Verfasser zu einfach/trivial/langweilig erscheint einen sehr ähnlichen Beweis für einen weiteren Fall des Problems zu wiederholen. Grundsätzlich ist von diesem Wort jedoch, gerade zu Beginn eines Mathematikstudiums, unbedingt Abstand zu nehmen, da man, wenn man das Wort „analog“ verwendet, auf jeden Fall auf Nachfrage hin bereit sein sollte den Beweis aus dem stehgreif zu geben, was wohl gerade zu Beginn etwas schwierig sein kann. Außerdem nehmt ihr euch selbst die Möglichkeit das exakte Aufschreiben eines Beweises zu üben, wenn ihr mithilfe des Wortes „analog“ einen Beweis abkürzt. Wir einigen uns also darauf, dass Wort „analog“ in den Bearbeitungen der Serien nicht zu verwenden.

Kontakt:

Website: www.leopoldkarl.com

Mail: lekarl@student.ethz.ch

LinkedIn: [Leopold Karl](#)