Lineare Algebra - Übungsnotizen 3

Leopold Karl

10. Oktober 2022

1 Überblick: Stoff der letzten Wochen

- Vektorräume
- Untervektorräume
- Körper
- Lineare Gleichungssysteme
- Span, Linearkombinationen und Erzeugendensystem
- Lineare Unabhängigkeit
- Basis eines Vektorraums

2 Serie 2

1. Präsentation: Leopold Reigl & Maxence Aleksa
   Hinweis: $\nexists := \neg\exists$; "Negation hineinziehen".
2. Präsentation: Mario Zingg & Marius Tgetgel
   Hinweis: Betrachte zwei Fälle: $F1 : x = 0; F2 : x \neq 0$; verwende im Fall 2 das Archimedische Prinzip, um $x \notin \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$ zu zeigen.
3. Präsentation: Meinolf Lemke & Ramon Willi
   Hinweis: "Klassisches"Mengenbeweisschema, wie in ÜS besprochen: Sei $x \in A$. Umformen von A unter Benützung logischer Begriffe und deren Umformungsregeln, bis $x \in B$ erhalten.
4. Präsentation: Tassia Flath & Yossif Marinov
   Hinweis: Am besten aufzeichnen.
5. Präsentation: Fabio Hilfiker & Federico Rezzonico
   Hinweis: Zeige $g_1 = g_2$ direkt; daraus folgt nach Def. des Inversen $f^{-1} = g_1 = g_2$; anschließend zeige Bijektivität.
6. Präsentation: Katharina Knist & Tim Fessler
   Hinweis: Wieder "Klassische"Mengenbeweise; angeben, wo man welche Voraussetzungen verwendet; f^{-1} (A) ist Urbild für eine Menge A (nicht Umkehrfunktion!).

3 Beispiele/Übungen

1. Löse das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Stimmen die folgenden Aussagen?
   (a) Jeder Vektorraum hat zwei Untervektorräume.
   (b) Jeder Körper hat zwei verschiedene Elemente.
   (c) Jeder Vektorraum hat zwei verschiedene Elemente.
3. Ist $\mathbb{C} = \{x \in \mathbb{R}^2\}$ mit der komponentenweisen Addition und der Multiplikation mit beliebigen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ ein Vektorraum?
4. Ist $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{C}$? Hierbei bezeichnet x_1 die erste Komponente von x.
5. Wie sieht es mit $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\}$ aus?
6. Was ist der Span $\langle\{5\}\rangle$ in $\mathbb{R}$?

4 Wie man einen Beweis aufschreibt

Ich werde hier anhand von Serie 2, Bsp. 6b) einen Beweis „schön" aufschreiben. Dies soll als Beispiel für das Notieren von Beweisen dienen.

Serie 2, Bsp. 6: Abbildungen und Operationen auf Mengen.
Gegeben sei eine Funktion $f : X \to Y$ und Teilmengen $A, A' \subseteq X$ und $B, B' \subseteq Y$.
(b) Zeigen Sie, dass $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ gilt. Unter welcher Bedingung an f gilt auf jeden Fall Gleichheit?

Behauptung 1: $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
Beweis 1: Sei $x \in A$ beliebig. Dann existiert nach der Wohldefiniertheit von f ein $y \in f(A)$ mit $f(x) = y$. $(\exists y \in f(A) \mid f(x) = y)$.
Da das Urbild als $f^{-1}(B \subseteq Y) \coloneqq \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ definiert ist, folgt mit obiger Aussage, dass $x \in f^{-1}(f(A) \subseteq Y)$. Da $x \in A$ beliebig war, ist somit die Behauptung bewiesen.

Behauptung 2: Ist die Funktion f injektiv, so gilt $A = f^{-1}(f(A))$.
Beweis 2:

Behauptung 2.1: $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
Beweis 2.1: Diese Inklusion wurde bereits in Beweis 1 gezeigt.

Behauptung 2.2: $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.
Beweis 2.2: Sei $x \in f^{-1}(f(A))$. Angenommen $x \notin A$. Dann $\exists z \in A : f(z) = y = f(x)$, da $y \in f(A)$ und $x \notin A$. Somit gilt aber $\exists x, z \in X : f(x) = f(z) \wedge x \neq z$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass f injektiv ist. Daraus folgt, dass x also doch in A sein muss und somit die Aussage.

Somit folgt aus Beweis 2.1 und 2.2 $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq A$, also Gleichheit $A = f^{-1}(f(A))$ und damit Behauptung 2.

Kontakt:
Website: www.leopoldkarl.com
Mail: lekarl@student.ethz.ch
LinkedIn: Leopold Karl