Lineare Algebra - Übungsnotizen 2

Leopold Karl

3. Oktober 2022

1 Überblick: Stoff der letzten Wochen

- Funktionen:
  Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, $A \subseteq X, B \subseteq Y$.
  - Injektivität: $\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$
  - Surjektivität: $\forall y \in Y\ \exists x \in X : f(x) = y$
  - $\mathrm{graph}(f) \coloneqq \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = y\} \subseteq X \times Y$
  - Bild von A unter $f : f(A) \coloneqq \{y \in Y \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$
  - Urbild von B unter $f : f^{-1}(B) \coloneqq \{x \in X \mid f(x) \in B\}$
  - Hilbert Hotel: mit Funktionen die Größe von Mengen vergleichen[1].
- Naive Mengenlehre:
  Seien $P, Q \subseteq X$ Mengen.
  - Durchschnitt: $P \cap Q \coloneqq \{x \in X \mid x \in P \wedge x \in Q\}$
  - Vereinigung: $P \cup Q \coloneqq \{x \in X \mid x \in P \vee x \in Q\}$
  - Komplement: $P^c \coloneqq X \backslash P \coloneqq \{x \in X \mid x \notin P\}$
  - De Morgan: $(P \cap Q)^c = P^c \cup Q^c$ bzw.[2] $(P \cup Q)^c = P^c \cap Q^c$
  - Kartesisches Produkt: $P \times Q \coloneqq \{(x, y) \mid x \in P \wedge y \in Q\}$
  - Russell-Paradoxon führt zu Verlangen nach axiomatischer Mengenlehre (Bsp.: ZF)[3]
- Logische Begriffe:

Logischer Ausdruck	Bedeutung	Negation
$\neg A$	A gilt nicht.	A
$A \wedge B$	A und B gelten.	$\neg A \vee \neg B$
$A \vee B$	A oder B (einschließend) gilt.	$\neg A \wedge \neg B$
$A \Rightarrow B$ $(\coloneqq \neg A \vee B)$	A impliziert B.	$A \wedge \neg B$
$A \iff B$	A und B sind äquivalent.	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
$\forall x \in X : A(x)$	Für alle x in X gilt $A(x)$.	$\exists x \in X : \neg A(x)$
$\exists x \in X : A(x)$	Es existiert ein x in X mit $A(x)$.	$\forall x \in X : \neg A(x)$
$\exists! x \in X : A(x)$	Es existiert genau ein x in X mit $A(x)$.	$\forall x \in X : \neg A(x) \vee \exists x, y \in X :$ $x \neq y \wedge A(x) \wedge A(y)$
$\forall x \in X\ \exists y \in Y : A(x, y)$	„Individuelle/punktweise Existenz“	$\exists x \in X\ \forall y \in Y : \neg A(x, y)$
$\exists y \in Y\ \forall x \in X : A(x, y)$	„Universelle/gleichmäßige Existenz“	$\forall y \in Y\ \exists x \in X : \neg A(x, y)$

- Fibonacci-Folgen

[1] Empfehlung: Kurzfilm zum Hilbert Hotel
[2] beziehungsweise
[3] Beispiel: Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre

2 Serie 1

1. Präsentation: Lukas-Magnus Retter

   Hinweise: In Aufgabe b) ist es von Vorteil zu verwenden, dass man $\mathcal{F}_{0,1}$ und $\mathcal{F}_{1,0}$ schon „gut“ kennt.

2. Präsentation: Lars Bänziger

   Hinweise: Bilder sind keine Beweise. Videotipp: „How to lie using visual proofs“ by „3Blue1Brown“.

3. Präsentation: Carlo Crespi & Kevin Santrau

   Hinweise: Beachte, dass man sich im Allgemeinen nicht aussuchen kann, den Limes zuerst nur auf den einen Teil einer Formel anzuwenden und erst später auf den anderen.

   Bsp:
   $$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n} \neq \lim_{n\to\infty} \frac{0}{1/n} = 0$$
   .

4. Präsentation: Aleksandar Tuzlak & Samuel Noger

   Hinweise: $\wedge, \vee$ werden bei Negation „umgedreht“; das Negationszeichen kann nicht in die Relationen hineingezogen werden ($\neg R(x,y) \not\Rightarrow R(\neg x, \neg y)$), da x und y Variablen sind und Variablen nicht negiert werden können.

5. Präsentation: Karim Addi & Lino Bielle

   Hinweise: Bei der Negation werden die Quantoren „vertauscht“, sowie die Aussage negiert. Der Bereich der Variablen bleibt jedoch gleich: $\neg(\exists \epsilon > 0 : A(\epsilon)) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : A(\epsilon) \not\Leftrightarrow \forall \epsilon \leq 0 : A(\epsilon)$

6. Katharina Knist & Luca Darms

   Hinweise: Decke stets auch die trivialen Fälle ab und unterscheide strikt zwischen aufgestellten Behauptungen und (zugehörigen) Beweisen, um nicht unabsichtlich nur Behauptungen aufzustellen.

3 Beispiele

1. Urbild: Sei $f : X \to Y,\ x \mapsto \sin(x)$. Dann ist das Urbild $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N} : x = \pi n\}$

2. Anwendung der Partition: Definition einer Funktion durch Fallunterscheidung.
   Bsp:
   $$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \mid x \in \mathbb{N}_u \coloneqq \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ gerade}\} \\ 0 & \mid x \in \mathbb{N}_g \coloneqq \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ungerade}\} \end{cases}$$

3. Eigenschaften von Funktionen: Sei $f : X = \mathbb{R} \to Y = \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x)$.
   Wie muss ich die Definitionsmenge X und die Wertemenge Y einschränken, um Injektivität, Surjektivität oder Bijektivität von f zu erreichen?

Kontakt:
Website: www.leopoldkarl.com
Mail: lekarl@student.ethz.ch
LinkedIn: Leopold Karl