I. Zeilenoperationen

1) Zeilen vertauschen: Permutationsmatrizen P $[\text{Umkehrung}: P^{-1}]$

II) k-te Zeile mit Skalar multiplizieren: $(a_{ij})_{ij} := \begin{cases} \lambda & \mid i=j=k \\ 1 & \mid i=j\neq k \\ 0 & \mid \text{sonst} \end{cases}$ $\left[i=j=k: \frac{1}{\lambda}\right.$

III) Zeilen addieren: $I + \lambda E_{kl}$ mit $E_{kl} := \begin{cases} 1 & \mid \text{Eintrag}: i=k \wedge j=l \\ 0 & \mid \text{sonst} \end{cases}$ $[I - \lambda E_{kl}$

II. Gauß-Verfahren

- Ziel: Matrix in Zeilenstufenform (ZSF) bringen
- Algorithmus: Wähle Pivot p ($\overset{!}{\neq} 0$); ziehe Pivot-Zeile $\frac{a_{ip}}{p}$-mal von i-ten Zeile (unter Pivotzeile) ab.
- Bsp.:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{-6} & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}$$

III. Kronecker-Deltafunktion

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

IV. Matrizenmultiplikation

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times l} = C_{m\times l} := \left(\sum_j a_{ij} b_{jk}\right)_{ik}$$

$\xrightarrow{\text{Special}}$ Blockmultiplikation:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

V. Invertierbarkeit von Matrizen

- $GL_n(K)$ ... General Linear Group ($n\times n$ Matrizen über K)
- $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$ $\quad [(AB)^{-1} = (AB)^{-1} AA^{-1} BB^{-1} = A^{-1}B^{-1}]$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ $\quad [(A^T)^{-1} = (A^T)^{-1} \cdot (A^{-1}\cdot A)^T = (A^T)^{-1} \cdot A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1})^T]$
- Ist $A \in GL_n(K)$, so gilt: $B \in GL_n(K) \Leftrightarrow A\cdot B \in GL_n(K)$

- <u>Algorithmen</u>:

  1) <u>Gauß-Jordan</u>: Gauß-Verfahren mit angehängter Identitätsmatrix:

$$(A \mid I) \to (I \mid A^{-1})$$

- Bsp.:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right)$$

  2) <u>Determinante & Adjunkte</u>: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A} \quad (=: \tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji}))$

- Bsp.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

  3) <u>Blockinversion</u> mit Schurkomplement ($S = D - CA^{-1}B$ und $A \in GL_n(K$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}$$

- Bsp.:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right)^{-1} \underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{4}}}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \frac{4}{3} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ \hline -2 & -1 & 4 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{3}$$

- <u>Kriterien</u> für Invertierbarkeit:

  1) $\exists A' : AA' = A'A = I$
  2) A hat vollen Rang
  3) $A_{m \times m}$ hat in ZSF m Pivots
  4) $\det(A) \neq 0$
  5) $\text{Ker}(A) = \{0\}$
  6) $\nexists$ EW $\lambda : \lambda = 0$
  7) $A = \prod$ aus P, $I_m + E_{ij}$, $D_{\neq 0}$
  8) A lässt sich durch Gauß-Verf. in obere Δ-M. mit diag $\neq 0$ bringen, sowie weiter auf I_m
  9) L_A ist inj. und End.
  10) L_A ist surj. und End.

  $\Big\}$ L_A ist bij

<u>Further Notes</u>:

  1) $\text{Diag}(a_i)^{-1} = \text{Diag}(\frac{1}{a_i})$
  2) $P^{-1} = P^T$
  3) $Q^{-1} \in O(n) = Q^T$
  4) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

VI. Dreiecksmatrizen (R... obere (rechte) Δ-M.; L... untere (linke) Δ-M.)

- $L_1 \cdot L_2 = L_3$; $R_1 \cdot R_2 = R_3$ (insbesondere gilt: $L^{-1} = L'$; $R^{-1} = R'$)
- Sei $W := \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ dann gilt: $WLW^{-1} = R$
- R mit $\operatorname{diag}(R) = 1$: $R = \prod (I_n + \lambda E_{ij})$ für gew. $\lambda \in K$, $i > j$
- <u>LR-Zerlegung</u>: $\forall A \in GL_n(K)\ \exists P, L, R: \quad PA = LR$
  - Algorithmus: Gauß mit gespeicherten Umformungsschritten
  - Bsp.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Speichere in } (31)]{-L_1 + L_3 \to L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{0} & 0 & 1 \\ \boxed{1} & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{1} & -2 & -3 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \prod_{i=n}^{1} P_i = P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- <u>Bruhat-Zerlegung</u>: $\forall A \in GL_n(K)\ \exists \overset{\text{Perm.}}{P}, B, B'$ obere Δ-M.:

$$A = BPB'$$

  - Algorithmus: Gauß von unten nach oben, links nach rechts (auch in Spalten!)
  - Bsp.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4/3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} 0 & 4/3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & +2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to B \begin{pmatrix} 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{B}} \to$$

$$\to B \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tilde{B}}_{B'} \to BPB'$$

- <u>Zusammengesetzte Matrizen</u>

$$(A_{m\times n} \mid I_n) \xrightarrow{\text{Zeilenop.}} (B_{m\times n} \mid U_{n\times n}) \iff B = UA$$

VII. Lineare Gleichungssysteme ($Ax=b$)

- eindeutige Lösung $\Leftrightarrow$ $\overbrace{A \text{ invertierbar } \vee A \text{ hat vollen Spaltenrang}}^{\cong\ \mathrm{Ker}(A)=0} \wedge e_n = 0$
- in ZSF: Keine Lös. $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} * \\ 0_{n,\ell} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} d_{\ell-n} \\ e_n \end{pmatrix}$ mit $e_n \neq 0$.

  unendlich viele Lös $\Leftrightarrow$ $e_n = 0$
- A auf ZSF bringen (ev. Variablenvertauschung $\cong$ Spaltenvertauschung)

  $A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & 0_{r,\ell} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$

  $e = 0$

  $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$ part. Lös. $\begin{pmatrix} -C \\ I_\ell \end{pmatrix} z$ homogene Lös. (für $z \in K^\ell$)

  $\Rightarrow$ $x = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -C \\ I_\ell \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} d - Cz \\ z \end{pmatrix}$

- **Lösbarkeitskriterien**

  I) **Satz von Kronecker-Capelli:**

  LGS lösbar $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|b)$ [Bem.: $\Leftrightarrow$ $b \in \langle v_i \rangle$ mit $A = (v_1\ v_2 \dots$

  II) $\det(A) \neq 0$ $\vee$ $(\det(A) = 0 \wedge \dagger \det(A_{b_i}) = 0)$ $\forall i$ mit $A_{b_i} := (v_1\ v_2 \dots \underset{i\text{-te Sp.}}{b} \dots v_n)$

  - für invertierbare Matrizen A

- **Algorithmen**

  I) **Gauß-Verfahren**: $(A|b) \xrightarrow{\text{ZSF}} (A'|b')$ Einsetzen für Lösung

  II) **Gauß-Jordan**: $(A|b) \xrightarrow{\text{Variablen vet.!}} \left(\begin{smallmatrix} I & C \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \middle| b' \right)$ Einsetzen

  $\longrightarrow$ für invertierbare Matrizen:

  III) **Kehrwertberechnung** $Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1} b$

  IV) **Cramer's Rule**: $b_i = \dfrac{\det(A_{b_i})}{\det(A)}$ mit $A_{b_i} = A$, wobei die i-te Spalte durch b ausgetauscht wurde

  - Bsp.: $\left(\begin{matrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right) =: A$ $\det(A) = 4$

    $\Rightarrow b_1 = \frac{-5}{4}$ $b_2 = \frac{3}{4}$ $b_3 = \frac{2}{4}$ $\Rightarrow b = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4}$

VIII. Vektorräume

- Def.: Tupel $(V, +, \cdot, 0_V)$ mit $+ : V \times V \to V : (v, w) \to v+w$
  über Körper K $\cdot : K \times V \to V : (\lambda, v) \to \lambda v$
- Axiome:
  1) $(V, +, 0_V)$ ist abel'sche Gruppe
  2) Assoziativität bzgl. $\bullet$ $\forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in V : (\lambda \bullet \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
  3) Einselelement (1_K): $\forall v \in V : 1_K \cdot v = v$
  4) Links- & Rechtsdistributivität: $\forall \lambda, \mu \in K \; \forall v \in V : (\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$

IX. Unterräume

- $U \subset V$ Untervektorraum $\Leftrightarrow \forall u, t \in U : u + t \in U \wedge \underset{\lambda \in K}{\lambda u \in U} \wedge U \neq \emptyset \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (U, +|_U, \cdot|_U, 1_K)$ VR über K
- $\bigcap_{i \in I} U_i$ ist $UVR_V \Leftrightarrow \forall i : U_i \neq \emptyset$
- $\bigcup_{i \in I} U_i$ ist $UVR_V \Leftrightarrow \exists i : \forall j : U_j \subset U_i$
- Bsp. (triviale UVR): $O := \{0_V\}$; V
- $\sum'_{i \in I} a_i v_i := \sum_{i \in I} a_i v_i \mid$ fast alle $a_i = 0$ $=: \langle V = \{v_{i \in I}\} \rangle \overset{UVR!}{\subset} V$

X. Lineare Unabhängigkeit & Basis

- Def. $\{v_{i \in I}\}$ ist linear unabhängig $\Leftrightarrow \left(\sum_{i \in I} a_i v_i = 0 \Leftrightarrow \forall i : a_i = 0 \right)$
- $\{v_{i \in I}\}$ l.u. $\Leftrightarrow \forall w \in \langle \{v_{i \in I}\} \rangle$: w hat eindeutige Darstellung als Linearkombination von $\{v_{i \in I}\}$
- Def. $\{v_{i \in I}\}$ ist Basis von $V \Leftrightarrow \langle \{v_{i \in I}\} \rangle = V \wedge \{v_{i \in I}\}$ ist l.u.
  $\Leftrightarrow \langle \{v_{i \in I}\} \rangle$ ist Erzeugendensystem von $V \wedge |\{v_{i \in I}\}|$ minimal für ES
  $\Leftrightarrow \langle \{v_{i \in I}\} \rangle$ l.u. $\wedge \; |\langle \{v_{i \in I}\} \rangle|$ für l.u.
- <u>Steinitz'scher Austauschsatz</u>: Für l.u. $\{v_{i \in I}\}$ existieren paarweise verschiedene $\{b_{i \in I}\}$, sodass $(\{b_{j \in J}\} =: B) \setminus \{b_{i \in I}\} \cup \{v_{i \in I}\}$ ist Basis von V

- $\dim(K^{(I)}) \geq |I|$ für $|I| \geq \infty$ im Sinne unendlicher Kardinalzahlen
- $\dim(U+V) - \dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V)$
- <u>Basis von $U_1 \cap U_2$</u> Algorithmus:

  Schreibe $(b^1_{i\in I}, b^2_{i\in J})=B$ in Matrix. $\overset{\text{Gauß}}{\Longrightarrow}$ #Nullzeilen $= \dim(U_1 \cap U_2)$;

  $\mathrm{Ke}(B) = \mathrm{Basis}(U_1 \cap U_2)$
- <u>Direkte Summe</u> (innere)

  $V = V_1 \oplus V_2 \iff V = V_1 + V_2 \wedge V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$

<u>XI. Lineare Abbildungen</u>

- Def.: f linear $\iff f(\lambda a + b) = \lambda f(a) + f(b)$
- Grundeigenschaften: i) $f(0_V) = 0_W$

  ii) f durch Basisvektoren eindeutig bestimmt
- Def.: - <u>Kern</u> von $f := \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subset V$

  - <u>Bild</u> von $f := \{w \in W \mid \exists v \in V: f(v) = w\} \subset W$
- f inj. $\iff \mathrm{Ke}(f) = \{0_V\}$
- f surj. $\iff \mathrm{Bild}(f) = W$
- $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ke}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f))$
- Falls $\dim(V) = \dim(W)$ gilt: f inj. $\iff$ f surj. $\iff$ f bij.
- f ist <u>Isomorphismus</u> $\iff$ f bij. $\iff$ A invertierbar $\wedge\ f = L_A$
- $V \underset{\text{Isom.}}{\cong} W \iff \dim V = \dim W$
- <u>Begrifflichkeiten linearer Funktionen</u>:

  i) Homomorphismus, $V \to W$ [Linear] $[\mathrm{Hom}_K(V, W)]$

  ii) Monomorphismus, $V \hookrightarrow W$ [inj., lin.]

  iii) Epimorphismus, $V \twoheadrightarrow W$ [surj., lin]

  iv) Isomorphismus, $V \xrightarrow{\sim} W$ [bij., lin]

  v) Endomorphismus, $V \to V$ [lin, $V \to V$]

  vi) Automorphismus, $V \xrightarrow{\sim} V$ [lin, bij, $V \to V$]

- **Summen und Produkte**: i) $\bigtimes_{i\in I} V_i := \{v_{i\in I} \mid v_i \in V_i\}$ kart. Produkt;
  mit $+ : (v_i)_i + (v_i')_i \mapsto (v_i + v_i')_i$
  $\cdot : \lambda (v_i)_i \mapsto (\lambda v_i)_i$: direktes Produkt
  ii) äußere direkte Summe: $\boxplus_{i\in I} V_i := \{(v_i)_{i\in I} \mid \forall i : v_i \in V_i \wedge$ fast alle $v_i = 0\}$
  iii) innere direkte Summe: $\bigoplus_{i\in I} V_i$ (wenn $\boxplus_{i\in I} V_i \to V, (v_i)_i \mapsto \sum'_{i\in I} v_i$) isomorphe Abb.
  iv) Abbildungen auf diesen:
  - $proj_j : \bigtimes_{i\in I} V_i \to V_j, (v_i)_i \mapsto v_j$
  - $incl_j : V_j \to \boxplus_{i\in I} V_i, v_j \mapsto \begin{cases} v_j & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

  $\}$ linear!

- **Darstellungsmatrix**: A ist Darstellungsmatrix von f, wenn das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \varphi_B \uparrow \wr & & \wr \uparrow \varphi_{B'} \\ K^n & \xrightarrow{L_A} & K^m \end{array}$$

  f Isomorphismus $\Leftrightarrow A = {}_B[f]_{B'}$ invertierbar $\wedge$ quadr.
  $\Rightarrow {}_B[f^{-1}]_{B'} = {}_B[f]_{B'}^{-1}$

- **Basiswechsel**: – ${}_B[id]_{B'} = {}_{B'}[id]_B^{-1}$
  – ${}_{B'}[id]_{B'} = {}_{B'}[id]_B \, {}_B[f]_B \, {}_B[id]_{B'}$

- **Rang** := dim Bild (f)

- Es gilt: - Spaltenrang = Zeilenrang
  - Rangerhaltung unter Isomorphismen: $Rang(f) = Rang(\varphi \circ f \circ \psi)$, φ, ψ Isomorp.

- **Abbildungsräume**
  - $Hom_K(V, W) := \{h : V \to W \mid h \text{ linear}\}$
  - $End_K(V) := Hom_K(V, V)$
  - $\dim_K Hom_K(V, W) = \dim V \cdot \dim W$ für $|V|, |W| < \infty$
  - Endomorphismenring $(End_K(V), O_V, id_V, +, \circ)$